

Der Ausgangspunkt zur Behandlung elektrischer Schaltungen mit zeitveränderlichen Signalen sind die Methoden zur Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke (AEP I).

Zur Lösung der **Differentialgleichungen** sind je nach **Zeitfunktion** verschiedene Methoden erarbeitet worden. (nach einer Unbekannten auflösen, homogene Lösung, inhomogene Lösung, Anfangsbedingungen)



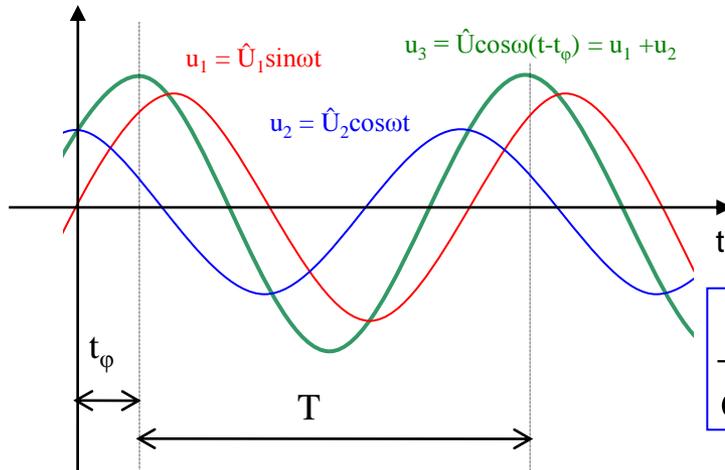
Einteilung der Signale nach ihrem **Zeitverlauf** erforderlich:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| periodische Signale - Spezialfall: | sinusförmige Signale → komplexe Rechnung |
| - Spezialfall: | nichtsinusf. periodische Signale → Fourierreihe |
| nichtperiod. Signale - Spezialfall: | endliche Zeitvorgänge → Fouriertransformation |
| - Spezialfall: | Zeitvorgänge, die bei t_0 beginnen (Schalt- und Übergangsvorgänge) → Laplacatransformation |

2. Periodische Signale

2.1 Schaltungen und Geräte mit sinusförmigen Signalen

Ausgangspunkt zur Behandlung sinusförmiger Signale → Eigenschaften der Sinus-, Kosinusfunktion, ihre Differentiation und Integration.



$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & = \hat{U} \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) \end{aligned} \right\}$$

mit $\varphi = \omega t_\varphi$, $\omega = 2\pi/T$

$$\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t \quad \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \omega (-\sin \omega t)$$

$$\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$$

mit $j = \sqrt{-1}$

$$\frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = j\omega e^{j\omega t} \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

genauso

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \quad \text{d.h.}$$

$$\int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}$$

Anstatt einer **Differentiation bzw. Integration** würde somit lediglich der Faktor $j\omega$ bzw. $1/j\omega$ erscheinen, d.h., es entstehen **lineare algebraische Gleichungen** wie bei Gleichstrom.

- Es müssen **lineare Bauelemente** vorhanden sein.
- Die **Frequenz** wird von linearen Bauelementen und bei linearen mathematischen Operationen **nicht verändert**, ist somit const.
- Der hinzugefügte **Imaginärteil bleibt „separat“** und kann nach der Lösung wieder abgetrennt werden.

Transformation der **Strom-Spannungs-Beziehungen**:

$$u = R i \rightarrow \underline{u} = R \underline{i} \quad u = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i} = j \frac{-1}{\omega C} \underline{i} \quad u = L \frac{di}{dt} \rightarrow \underline{u} = j\omega L \underline{i}$$

Definition: komplexer Widerstand \underline{Z} und Leitwert \underline{Y}

$$R = R \quad X_C = \frac{-1}{\omega C} \quad X_L = \omega L$$

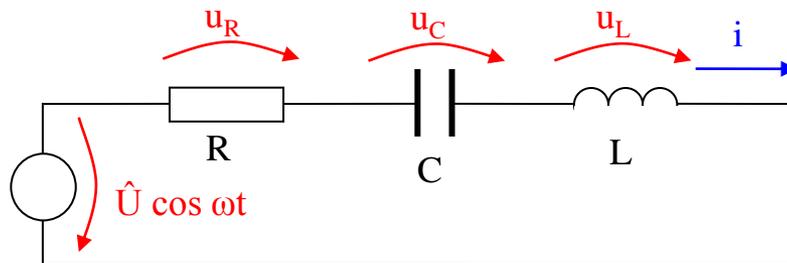
$$G = G \quad B_C = \omega C \quad B_L = \frac{-1}{\omega L}$$

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y} = G + jB$$

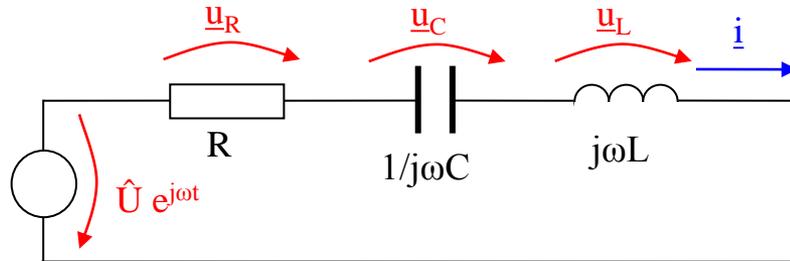
Konkrete Lösungsstrategien für sinusförmige Vorgänge:



Beispiel für praktische Vorgehensweise:



- 1. Schritt:** Umwandlung der **Schaltung** mit obigen Definitionen und der **Spannungsquelle** (durch Hinzufügen eines imaginären Sinusanteils gleicher Amplitude, Frequenz und Phase)



Ohm'schen Gesetz:

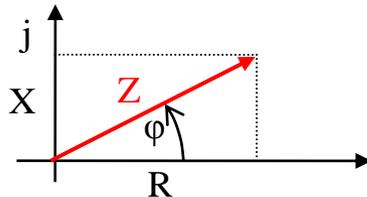
$$\underline{\hat{i}} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + 1/j\omega C + j\omega L}$$

ist **Lösung im Komplexen**

2. Schritt: Umformen in eine **Schreibweise**, die eine einfache Trennung in Real- und Imaginärteil ermöglicht (kartesischen Koordinaten).

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

3. Schritt: Umformen der kartesischen Koordinaten in **Polarkoordinaten**



$$R + jX = Z e^{j\varphi} \quad \text{mit} \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j\varphi}} \quad \text{mit} \quad \tan\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$\underline{\hat{i}} = \frac{\hat{U} e^{j(\omega t - \varphi)}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

4. Schritt: Zusammenfassen aller als Produkte und Quotienten vorhandenen e^{jx} - Funktionen entsprechend der Regeln der Potenzrechnung. Danach folgt der Realteil durch Weglassen des $j \sin \psi$ von $e^{j\psi}$.

$$i(t) = \frac{\hat{U} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Preis dieser einfachen Art der Rechnung ist Umgang mit komplexen Zahlen.

Es ist zu sehen, dass sich weitere Vereinfachungen anbieten:
Zerlegung in zwei Teile einer für **Amplitude**, der andere für **Phasenlage**

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\hat{U}}{|\underline{Z}|} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{Z}$$

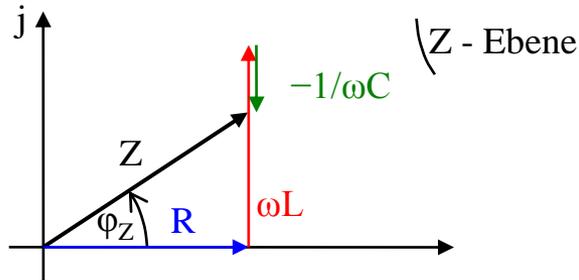
$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi_Z = \varphi_u - \arctan \frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}\}} = - \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

→ **Amplituden- bzw. Betragsrechnung** und **Phasenrechnung**

In Fortführung können alle Ströme, Spannungen, Widerstände und Leitwerte als **Zeiger** in einer komplexen Ebene abgebildet werden.

1. In der Ebene sind **gleiche Elemente** (d.h. i , u , Z ...) zu verarbeiten.
2. **Imaginäre und reelle Achse** müssen **gleichen Maßstab** und Maßeinheit haben.
3. Es können **Zeiger addiert** (wie Vektoren) und subtrahiert (Addition des negativen Zeigers) werden.
4. Zwischen den Ebenen kann relativ einfach umgerechnet werden (z.B.: $\underline{Y} = 1 / \underline{Z} \rightarrow Y = 1 / Z$ und $\varphi_Y = -\varphi_Z$ oder $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \rightarrow U = Z \cdot I$ und $\varphi_u = \varphi_Z + \varphi_i$).
5. Bei Strömen und Spannungen werden **Achsen** in der Regel **nicht explizit gezeichnet** (ein Wert ist Bezugsrichtung).
6. Zum Vergleich der Richtungen \rightarrow Ebenen **exakt übereinander** darzustellen (dabei deutliche Kennzeichnung).

Reihenschaltung R, L, C in einer **Widerstandsebene** (Z-Ebene)



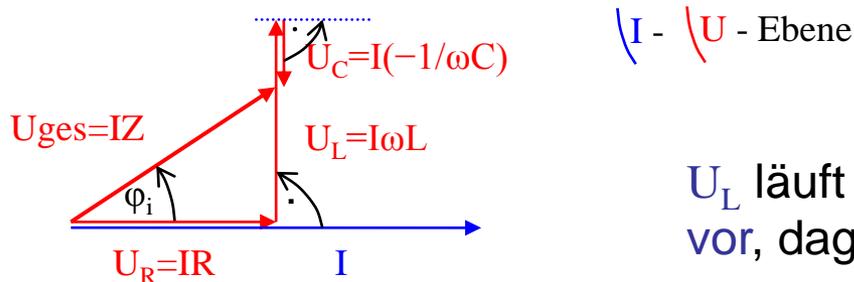
$$Z^2 = R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2$$

$$\tan \varphi_Z = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$$

Z und φ_Z entweder bei **exakter maßstäblicher Zeichnung** durch **Messen** der Länge von Z und des Winkels φ_Z oder durch die **Verhältnisse im Dreieck** mit dem Satz des **Pythagoras** und einer **Winkelfunktion**

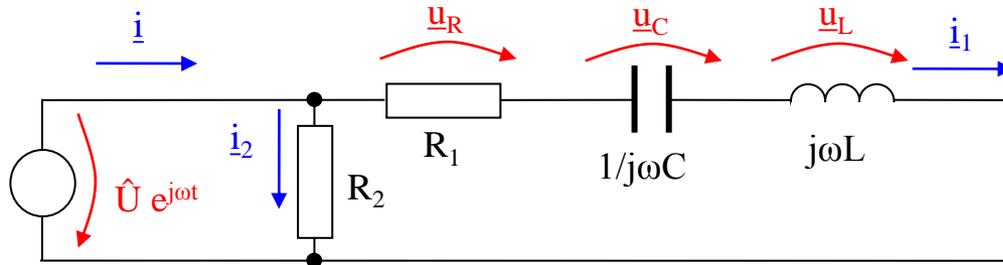
$$I = U/Z = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi_Z = -\arctan \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$$

Darstellung aller Ströme und Spannungen Reihenschaltung R, L, C

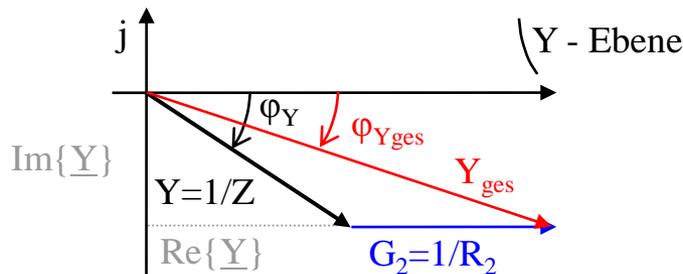


U_L läuft um 90° gegenüber dem Strom vor, dagegen U_C um 90° hinterher

Parallelschaltung von Widerständen Addition der Leitwerte → **Leitwertebene**



Für komplexen **Gesamtwiderstandes** Beginn in Z-Ebene für Reihenschaltung von R, L, C (wie oben) → **Invertieren** des Ergebnisses in die Y-Ebene

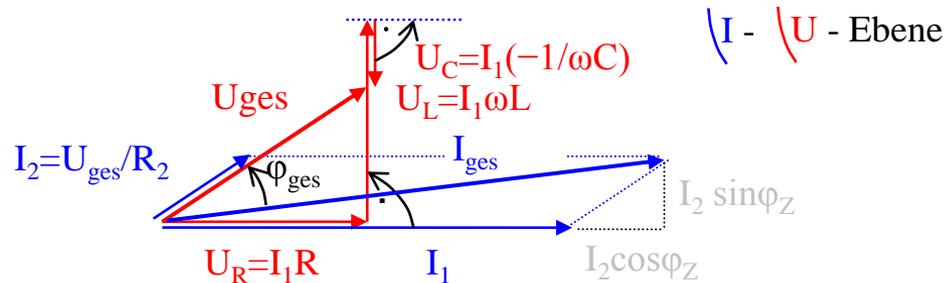


Y_{ges} nach Dreiecksbeziehungen:
Dreieck der Seiten $\text{Im}\{\underline{Y}\}$, $(\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)$, Y_{ges}

$$Y_{ges} = \sqrt{\text{Im}\{\underline{Y}\}^2 + (\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_{Y_{ges}} = \frac{\text{Im}\{\underline{Y}\}}{\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2}$$

$$Y_{ges} = \sqrt{\left(\frac{1}{Z} \sin(-\varphi_Z)\right)^2 + \left(\frac{1}{Z} \cos \varphi_Z + \frac{1}{R_2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_{ges} = \frac{\frac{1}{Z} \sin(-\varphi_Z)}{\frac{1}{Z} \cos \varphi_Z + \frac{1}{R_2}}$$

Darstellung der **Ströme und Spannungen** ausgehend von i_1 alle Spannungen bis zur u_{ges} , dann i_2 und danach i_{ges}



Dreieck $(I_1 + I_2 \cos \varphi_Z)$, $I_2 \sin \varphi_Z$, $I_{ges} \rightarrow I_{ges} = U_{ges} Y_{ges}$ sowie φ_{ges}

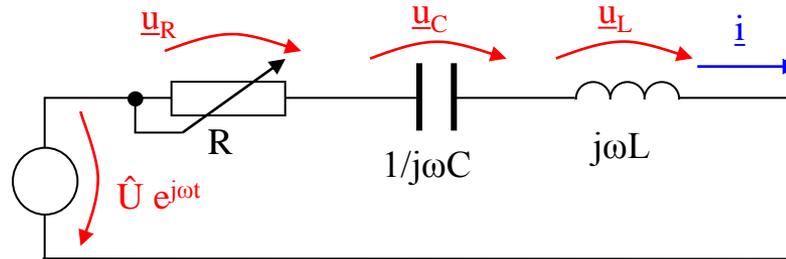
Zeigerbilder leicht konstruierbar, Vorgehensweise, bei der Zeiger **nur addiert** werden, ist **immer vorzuziehen**

Zerlegung eines Zeigers ist gangbar (für Zeiger senkrecht aufeinander mit dem **Thaleskreis**)

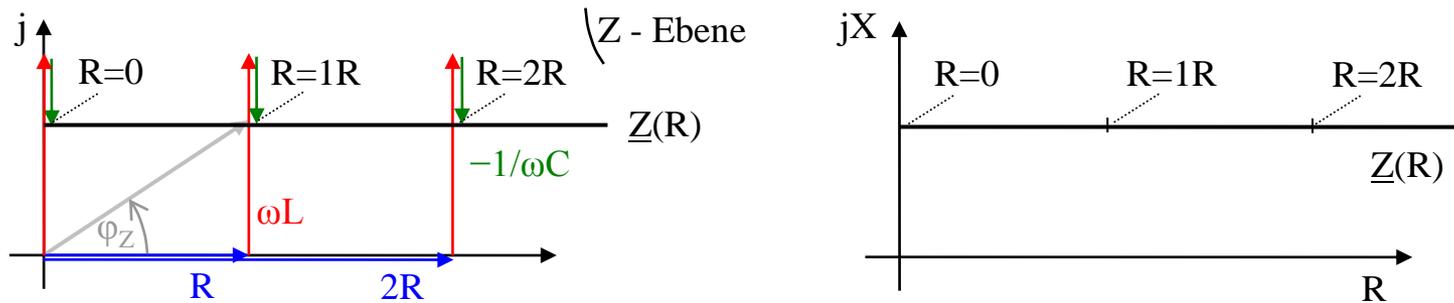
Zeigerbild nur zur **qualitativen Analyse** \rightarrow relativ komplexe Schaltungen schnell untersucht

maßstäblicher Zeichnung \rightarrow einfache Variante

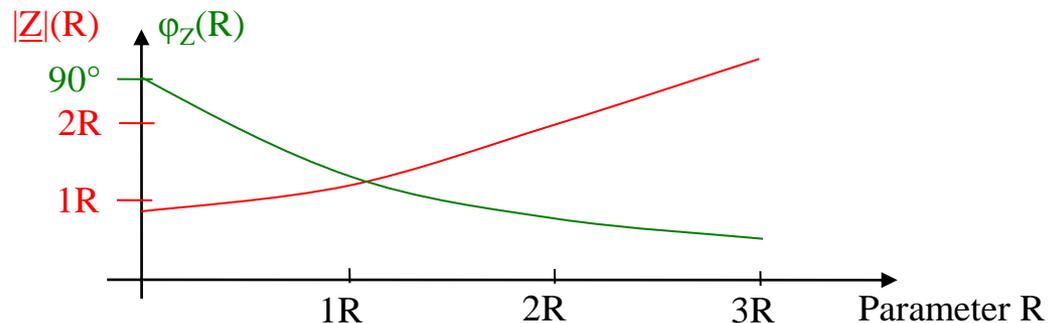
Erweiterung der Zeigerdarstellung zu **Ortskurven** → graphische Methode, die insbesondere bei Auswertung von Parametervariationen hilft.



Die **Ortskurve** ist die Kurve, die die Spitzen der **Ergebniszeiger** verbindet.

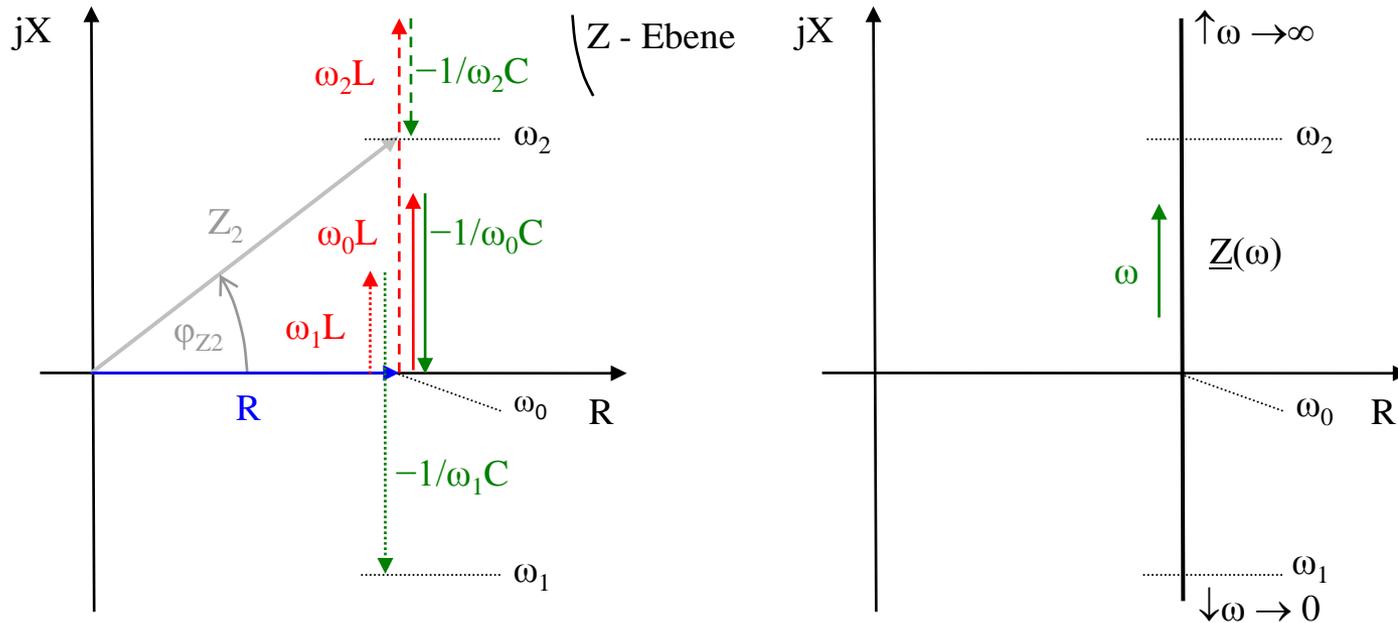


Kurve für den **Betrag** sowie zum anderen als Kurve für die **Phase**



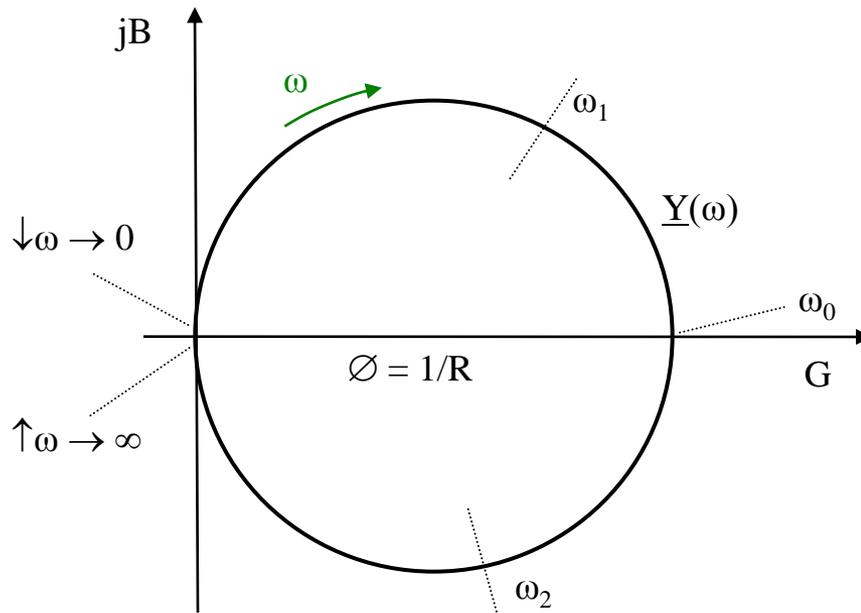
Ortskurven für qualitative Darstellungen sehr gut geeignet.

Beispiel \underline{Z} und \underline{Y} einer Reihenschaltung R, L, C mit Parameter ω



Invertierung der Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ zu einer Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$

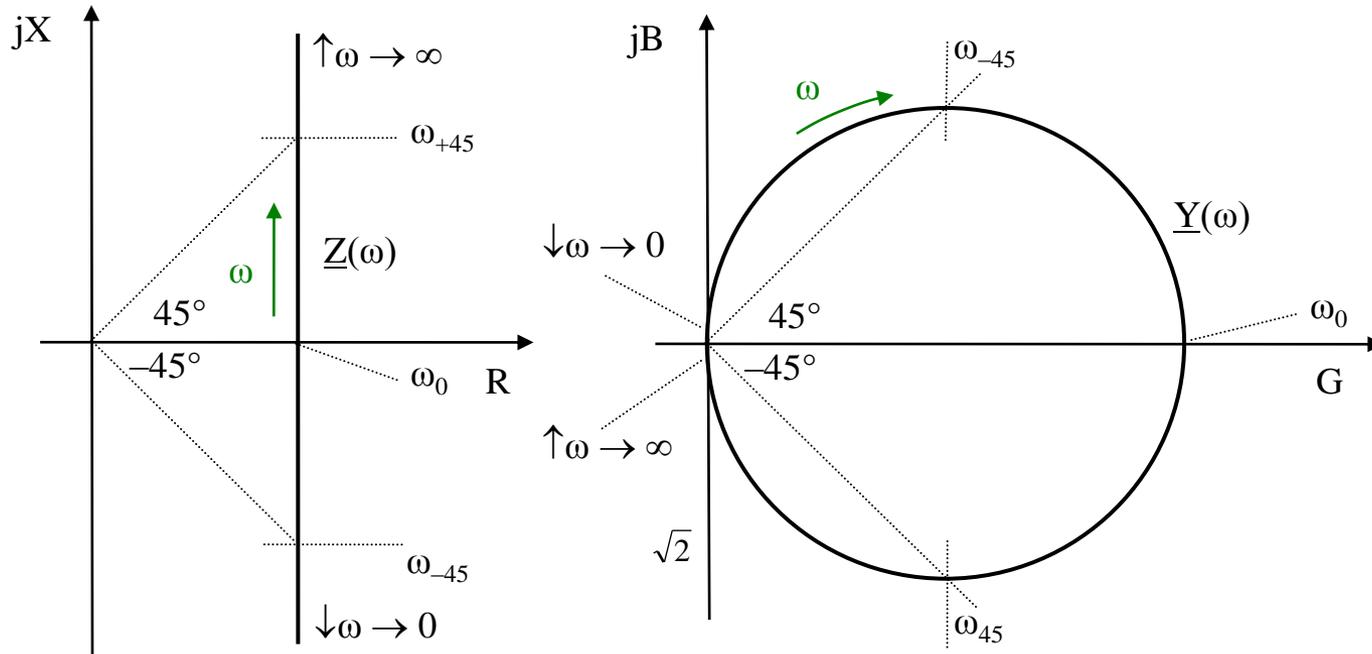
1. Durch $Y = 1/Z$ wird der **längste Zeiger zum kürzesten** und umgekehrt.
2. Wegen $\varphi_Y = -\varphi_Z$ erfolgt eine **Spiegelung an der reellen Achse**.
3. Rein **reelle Zeiger bleiben reell**.
4. **Kreis, bleibt Kreis**. (Geraden sind Kreise mit Radius ∞).



In diesen Kurven sind **drei besondere Parameter** (Kurvenpunkte) des Reihenschwingkreises vorhanden.

- dem **Imaginärteil Null** ($1/\omega_0 C = \omega_0 L$), daraus folgt die **Definition der Resonanzfrequenz** $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$
- dem **Betrag des Imaginärteils gleich dem Realteil** ($|\omega_{\pm 45} L - 1/\omega_{\pm 45} C| = R$), daraus folgen die zwei Punkte ω_{+45} und ω_{-45}

$$\omega_{\pm 45} = \pm R/2L + \sqrt{(R/2L)^2 + 1/LC}$$



Definition der Bandbreite des (idealen) Reihenschwingkreises

$$\Delta\omega_B = \omega_{+45} - \omega_{-45} = R/L = \omega_0^2 RC = \omega_0 R \sqrt{C/L} = \omega_0 / Q$$

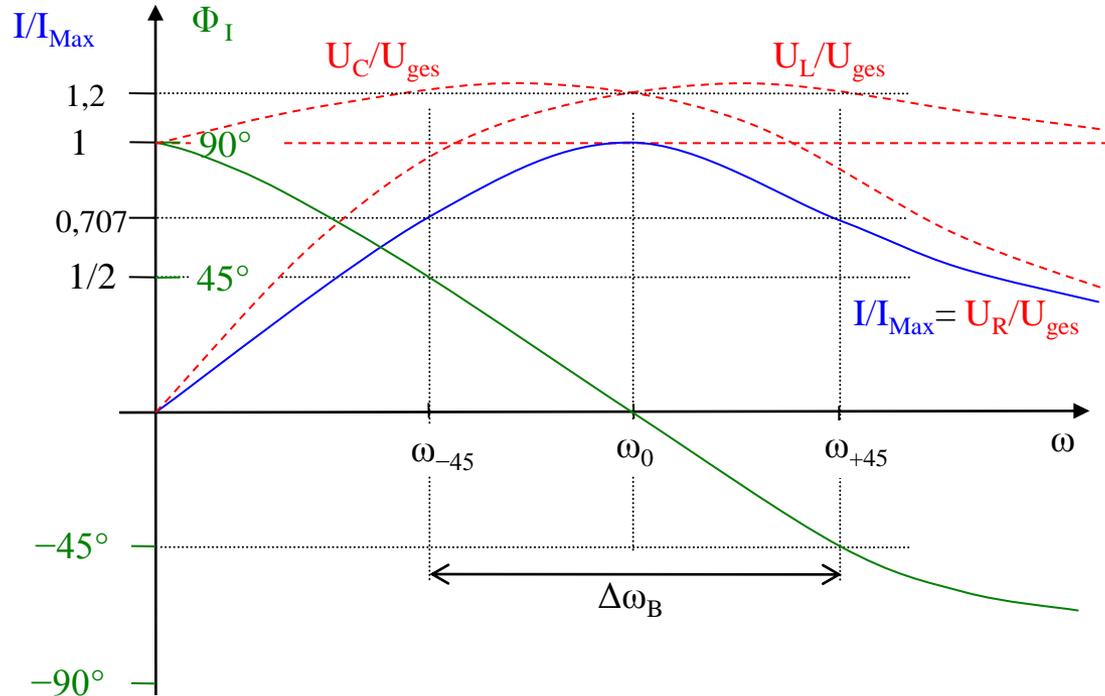
Mehrere **interessante Aspekte** erfüllt:

- Betrag des **Imaginärteils gleich dem Realteil**,
- $Z = \sqrt{2}R$ (bzw. $Y = 1/\sqrt{2}R$) und
- $\sqrt{2}$ (bzw. $1/\sqrt{2}$) entspricht im logarithmischen Dämpfungsmaß **gerade 3 dB**.
(Eine Dämpfung von 3 dB nimmt aber ein normales menschliches Ohr gerade noch nicht wahr.)

$Q = \text{Güte}$, Resonanzschärfe oder Resonanzüberhöhung

Verhältnis $\omega_0 L$ oder $1/\omega_0 C$ zu R . Bei Resonanzfrequenz $U_L = U_C = QU_R$.

Frequenzgang und Phasengang

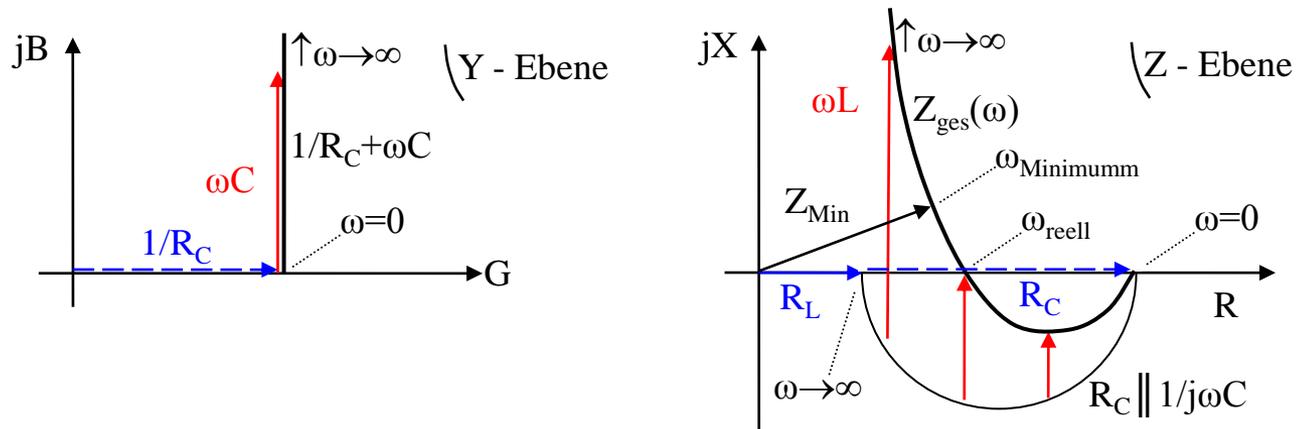
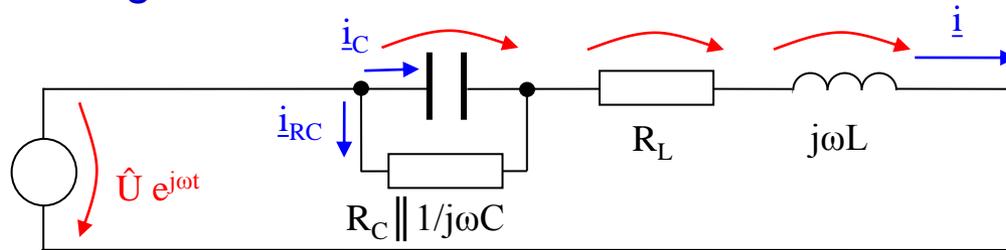


Frequenzgang und Phasengang \rightarrow messtechnisch ermitteln \rightarrow Ortskurve

$U_{C\text{Max}}$ und $U_{L\text{Max}}$ sind größer als Quelle (oben ca. 1,2) liegen vor oder hinter ω_0

Spannung bei $\omega = 0$ an C, bei $\omega = \omega_0$ an R ($\underline{U}_C = -\underline{U}_L$) und bei $\omega \rightarrow \infty$ an L

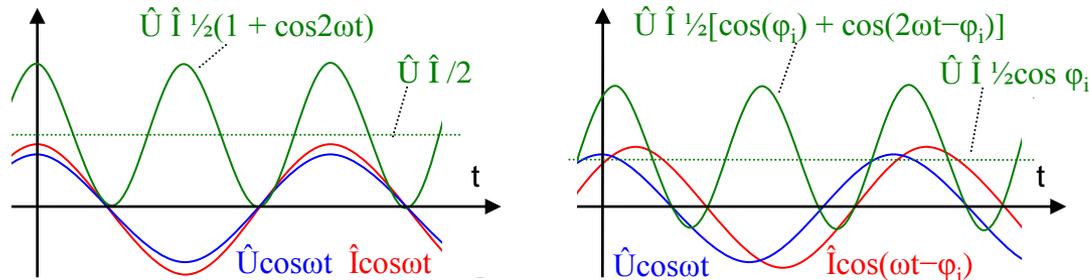
Reihenschwingkreis mit **realen** Verlusten



Halbe Gerade ($0 \leq B \leq \infty$) \rightarrow Invertierung in Z-Ebene \rightarrow **Halbkreis**
 Kürzeste Zeiger $1/R_C$ wird **längster** R_C (Durchmesser Halbkreises)
 Wegen $\varphi_Z = -\varphi_Y$ liegt Halbkreis **nach unten**

ω_0 fällt zu ω_{reell} und $\omega_{Minimum}$ auseinander

Außer dem Verhalten bei verschiedenen Frequenzen ist die **Leistung** bei sinusförmigen Strömen und Spannungen zu untersuchen.

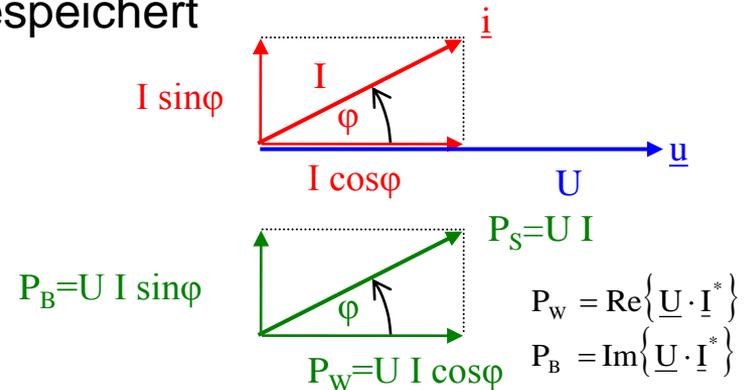


$$p(t) = \hat{U} \hat{I} \frac{1}{2} [\cos\{\varphi_u - (-\varphi_i)\} + \cos\{2\omega t + \varphi_u + (-\varphi_i)\}] \quad \text{mit } \varphi_u + \varphi_i = \varphi$$

$\cos \varphi \neq 1 \rightarrow$ Teil der Energie wird hin- und hergespeichert

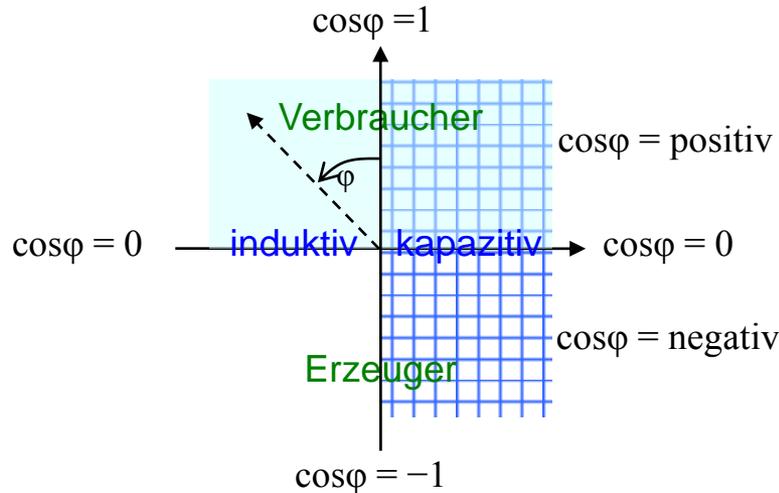
Aussagekräftige Information \rightarrow **Mittelwert**

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi$$



Definition: Wirk-, Blind-, Scheinleistung und Leistungsfaktor

$$P_W = \bar{P} = U I \cos \varphi \quad P_B = U I \sin \varphi \quad P_S = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = U I \cos \varphi$$



$1 > \cos \varphi \geq 0 \rightarrow$ kapazitiv

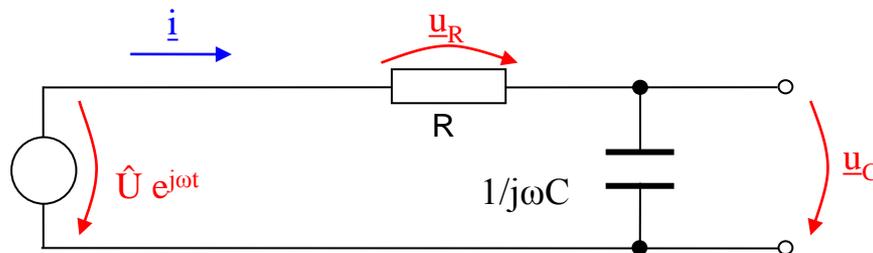
$1 > \cos \varphi \geq 0 \rightarrow$ induktiv

An $\cos \varphi$ ist Richtung nicht allein erkennbar

Leistungskenngrößen und $\cos \varphi \rightarrow$ integrale Kennwerte nur Sinusform

Nichtsinusförmige Größen nur P_W mit \bar{P}

Aufgabe: Tiefpass ohne Last



Ein Tiefpass soll analysiert werden für $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $f = 100 \text{ Hz}$ und $U = 5 \text{ V}$.

Frage 1: Wie arbeitet diese Schaltung physikalisch?

Frage 2: Wie sieht das maßstäbliche Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?

Frage 3: Wie wären Betrag und Phase von u_C aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?

Frage 4: Wie groß ist die obere Grenzfrequenz f_{go} ?

Frage 5: Wie sieht die Ortskurve $\underline{U}_C(\omega)$ für $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ aus, wie Frequenz- und Phasengang von u_C ?

Hinweis: Tabelle für f , ω , U_C und φ_C mit ca. 5 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach f_{go}).

Zusatzfrage: Wie sieht die Schaltung eines Tiefpasses mit R und L aus?