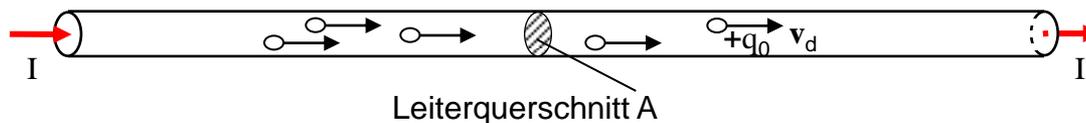


3. Vorgänge in elektrischen Leitern

3.1 Grundbegriffe für elektrische Größen im Leiter

Beschreibung der **Bewegung** der Ladungsträger

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung der Vorgänge in elektrischen Leitern ist die **Naturgröße Ladung**.



Definition.: elektrischer Strom I

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

und

$$Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt$$

Definition.: Stromdichte \mathbf{S}

$$|\mathbf{S}| = \frac{dI}{dA_{\perp}}$$

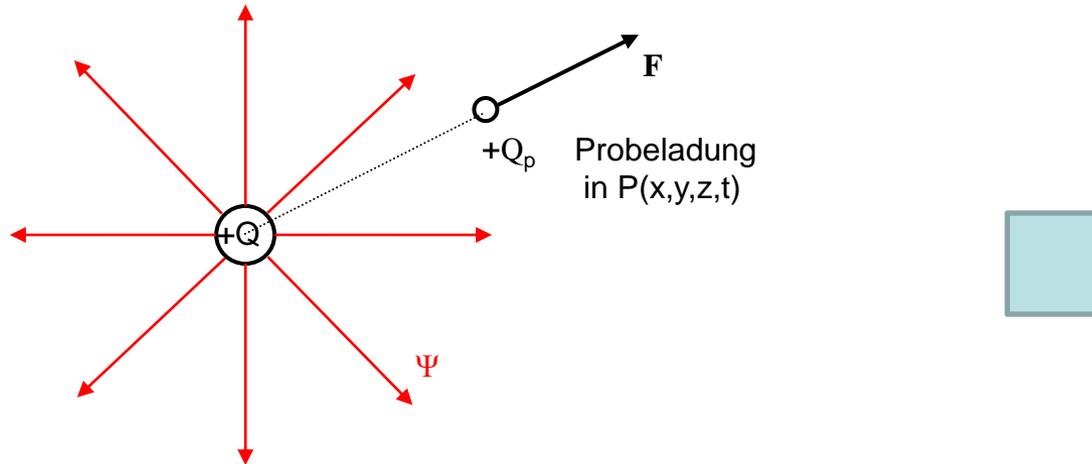
$$\mathbf{S} = |\mathbf{S}| \mathbf{e}_I$$

und

$$I = \int_{\text{Querschnittsfläche}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}_d \rho = \frac{ds_I}{dt} \frac{dQ}{dV} = \frac{d}{dt} \frac{dQ}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_I = \frac{dI}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_I$$

Zur **Beschreibung der Kraftwirkungen** wird in jedem Raumpunkt $P(x,y,z,t)$ im Raum um die ruhende Ladung mit einer ebenfalls ruhenden Probeladung (Q_p) die **Kraft gemessen**.

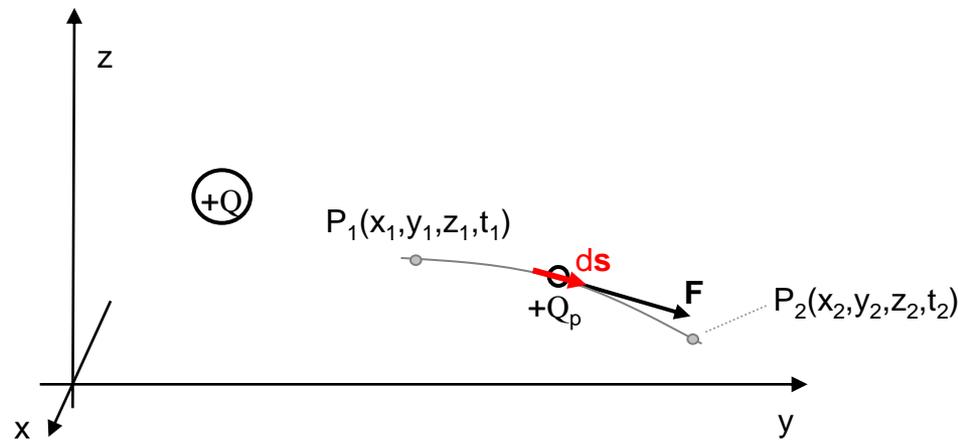


Definition.: elektrisches Feld \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_p} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = Q_p \mathbf{E}$$

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes - dem elektrischen Strömungsfeld.

Zur **Beschreibung der Energieänderung** wird von $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ nach $P_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ mit einer Probeladung, die der Kraftwirkung folgt, **Kraft · Weg** ermittelt .

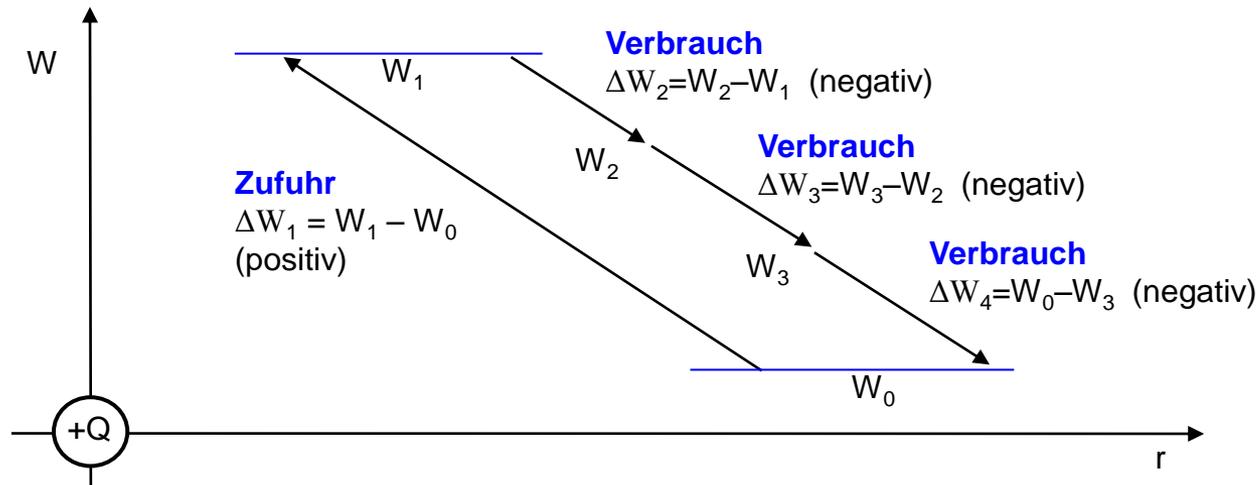


Definition: elektrische Spannung U (und Potential φ)

$$U = \frac{\Delta W_{\text{Abgabe}}}{Q_p} = \frac{-\Delta W}{Q_p} = \varphi_1 - \varphi_2$$

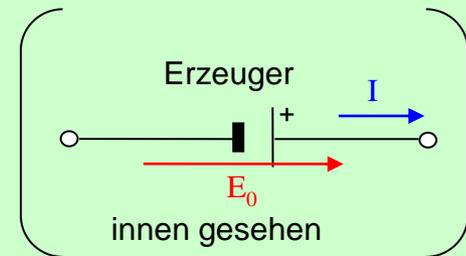
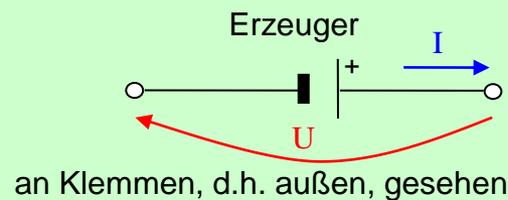
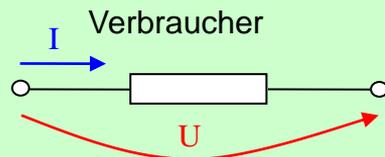
$$\varphi = \frac{W}{Q_p} = \int_{r(P)}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \varphi_{\infty}$$

Wenn sich nach diesem Zusammenhang die Probeladung getrieben von der Kraft des Feldes bewegt nimmt ihre **potentielle Energie** ab.



Mit der Definition sind entsprechende **Zählpfeilregeln** verbunden.

Zählpfeilsystem für Strom und Spannung

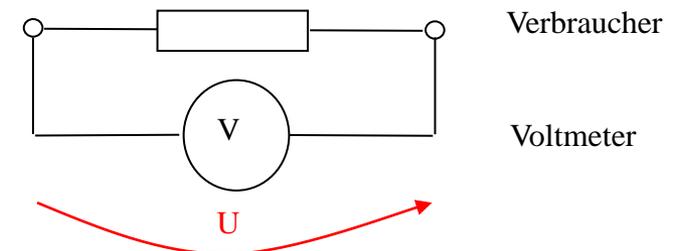
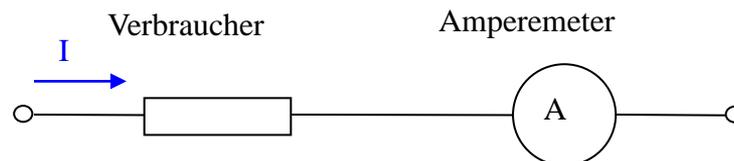


Umkehrung: $\mathbf{E} = \frac{dU}{ds} \mathbf{e}_I$ genauer: $\mathbf{E} = \mathbf{grad}U = -\mathbf{grad}\varphi$ aus $U = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$

Zusammenhang: $\mathbf{S} = \kappa \mathbf{E}$

Messung der Ladungsmenge

Messung des elektrischen Stromes Messung der elektrischen Spannung



Aufgabe 3.1.1

Gegeben ist ein elektrischer Leiter (Abb. 3.9) aus Kupfer, Querschnitt 1 mm^2 , Strom 1 A für die Dauer von 1 h . Das entspricht mit etwas gerundeten Zahlen einer Hausinstallation für eine Leuchte mit zwei Glühlampen von je 100 W .

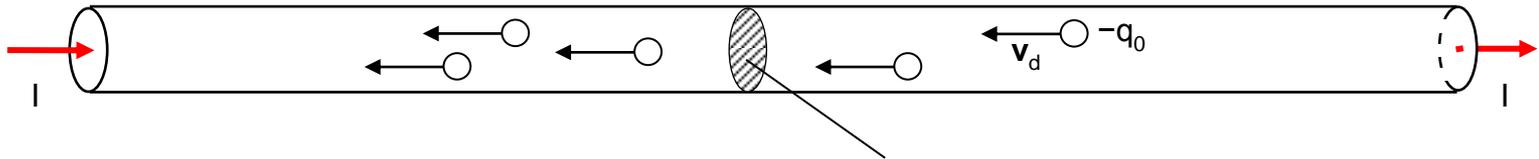


Abb. 3.9 Stromdurchflossener Leiter

Frage 1: Welche Ladungsmenge und wie viele Elektronen sind durch den Leiter geflossen?

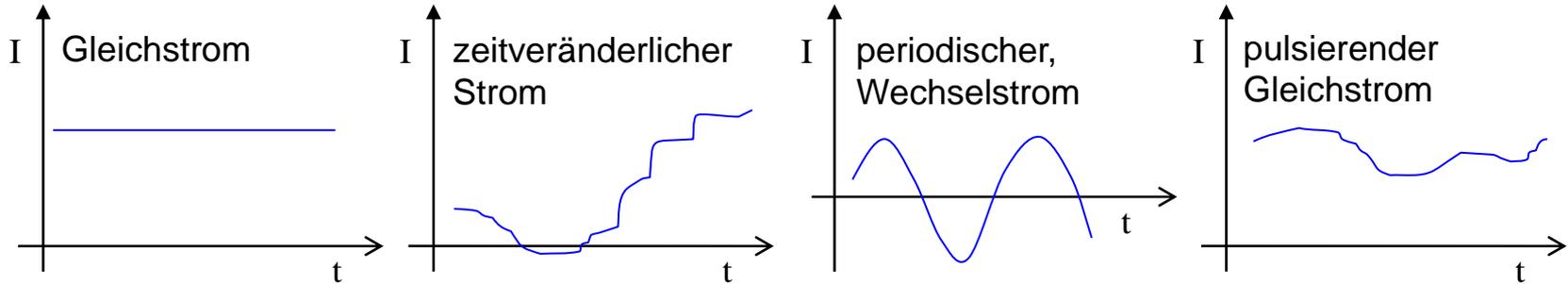
Frage 2: Wie viele Elektronen stehen pro cm^3 Kupfer für die Leitung zur Verfügung und wie groß ist die Raumladungsdichte?

(Hinweise: Die spezifische Masse von Kupfer ist $\gamma = 8,93 \text{ g/cm}^3$. Die Masse eines Kupferatoms beträgt $m_{\text{Cu}} = 106 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ (relative Atommasse/Avogadro'sche Zahl). Bei Kupfer steht in sehr guter Näherung bei Raumtemperatur pro Atom ein Valenzelektron für eine freie Bewegung zur Verfügung.)

Frage 3: Wie groß ist die Stromdichte im Leiter?

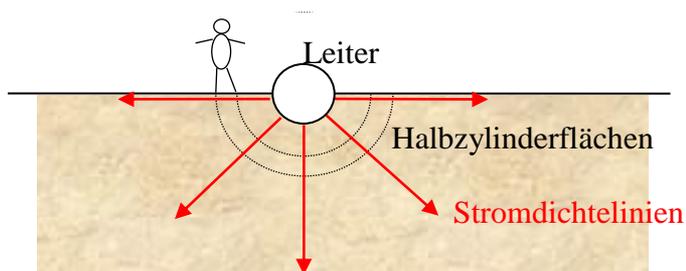
Frage 4: Wie schnell driften diese Elektronen durch den Leiter?

Beispiele für häufige Stromformen



Aufgabe 3.1.2

Eine Hochspannungsleitung 110 kV ist gerissen und liegt waagrecht auf dem Boden.



Pro Meter Länge fließt ein Strom von ca. 100 A in den Boden (Leitfähigkeit Erde $\kappa \approx 10^{-2} \text{ A/Vm}$, Luft nicht leitend). Das Leiterseil hat einen \varnothing von 2 cm und ist näherungsweise zur Hälfte in den Boden eingesunken.

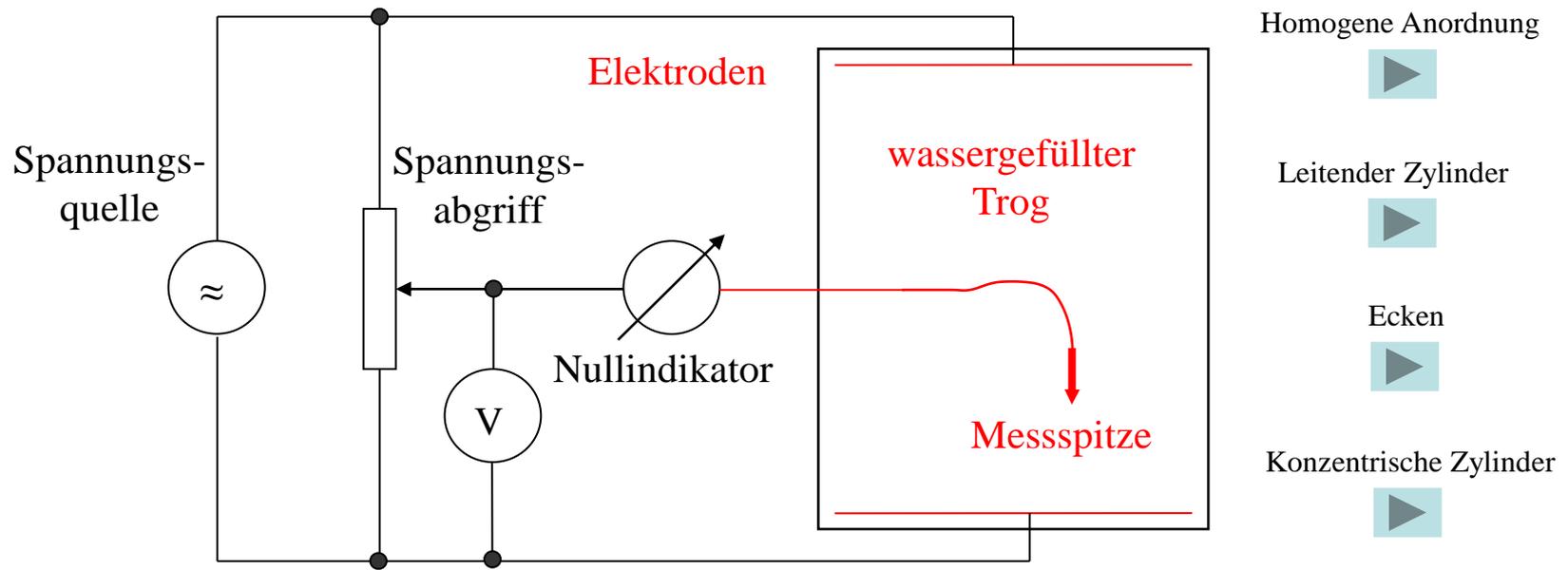
Frage 1: Wie groß sind die Stromdichte und die elektrische Feldstärke auf einer Halbzylinderfläche in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?

Frage 2: Wie groß ist die Schrittspannung für einen Menschen (bei 0,5 m Abstand der Füße) in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?

Messung und Darstellung von **Feldern in leitenden Medien – Feldlinien**

- Zur Darstellung und Veranschaulichung von Feldern hat insbesondere **Faraday** den Begriff **Feldlinien** benutzt. Hier wird dieser Begriff durch Messungen am elektrolytischen Trog verdeutlicht.
- Mit einer Messspitze werden in der Feldanordnung **Linien gleicher Spannung (Äquipotentiallinien)** gesucht und in einer Zeichnung festgehalten.
- Da die Stromdichte in jedem Punkt des Feldbildes senkrecht auf den Äquipotentiallinien steht, können nach der Methode der **quadratähnlichen Figuren** ausgewählte **Stromdichtelinien** nach „Augenmaß“ gezeichnet werden.

Versuchsaufbau:



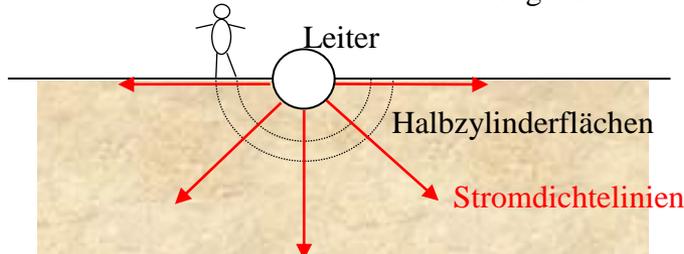
Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus (Draufsicht)

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

- Gut leitende Gegenstände und Elektroden sind immer eine Äquipotentiallinie (Das stellen Ausgleichsströme unmittelbar her.). Dadurch kann in einem leitenden Ring kein Spannungsunterschied auftreten, der Ring ist feldfrei (Faraday'scher Käfig).
- Äquipotentiallinien treffen immer senkrecht auf nicht leitende Begrenzungen. Begrenzungen ergeben somit immer die letzte Stromdichtelinie.
- Der Strom bevorzugt den besser leitenden und den kürzeren Weg, nutzt aber alle leitenden Bereiche. Er füllt immer den gesamten zur Verfügung stehenden Raum aus.
- Bei Konstruktionen sind Anordnungen, wo sich der Strom (ungewollt) konzentriert, zu vermeiden (z.B. runde statt scharfe Ecken wählen).

Aufgabe 3.1.2

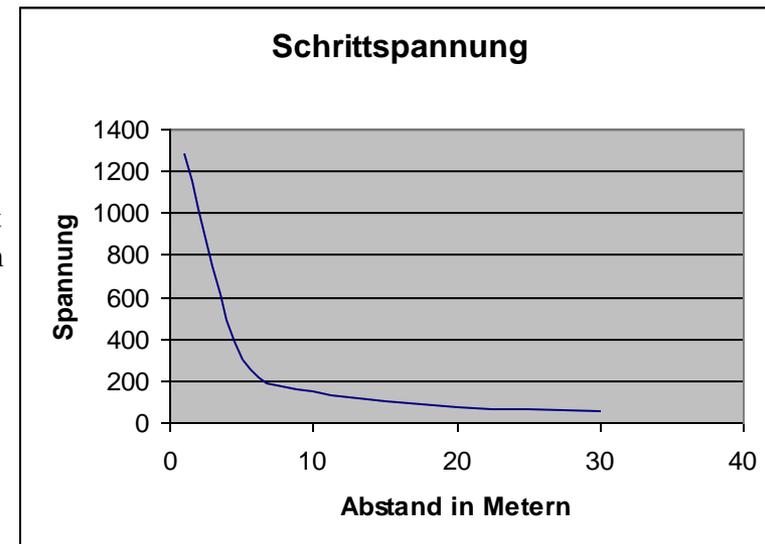
Eine Hochspannungsleitung 110 kV ist gerissen und liegt waagrecht auf dem Boden.



Pro Meter Länge fließt ein Strom von ca. 100 A in den Boden (Leitfähigkeit Erde $\kappa \approx 10^{-2}$ A/Vm, Luft nicht leitend). Das Leiterseil hat einen \varnothing von 2 cm und ist näherungsweise zur Hälfte in den Boden eingesunken.

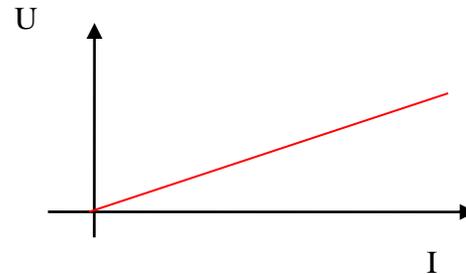
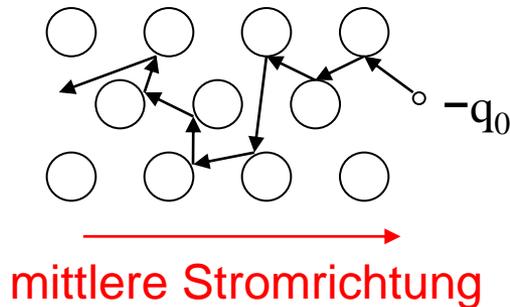
Frage 1: Wie groß sind die Stromdichte und die elektrische Feldstärke auf einer Halbzylinderfläche in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitemittelpunkt?

Frage 2: Wie groß ist die Schrittspannung für einen Menschen (bei 0,5 m Abstand der Füße) in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitemittelpunkt?



3.2 Strom – Spannungs – Beziehung am Widerstand

Driftbewegung und Ohm'sches Gesetz



Definition des elektrischen Widerstandes – Ohm'sches Gesetz

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } U = R I$$

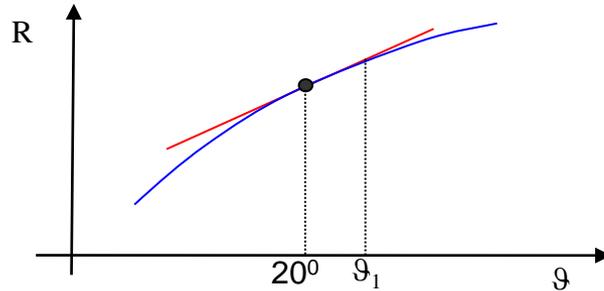
bei homogener Stromverteilung

Bemessungsgleichung des elektrischen Widerstandes

$$R = \frac{l_{\text{Leiter}}}{\kappa A_{\perp}} = \frac{\rho l_{\text{Leiter}}}{A_{\perp}} \quad \text{mit } \rho = \text{spezifischer Widerstand}$$

$\kappa = \text{spezifischer Leitwert}$

Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes

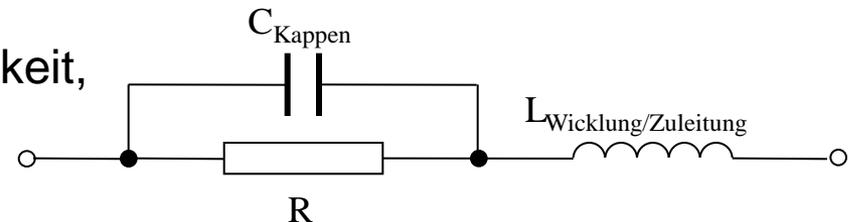


Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

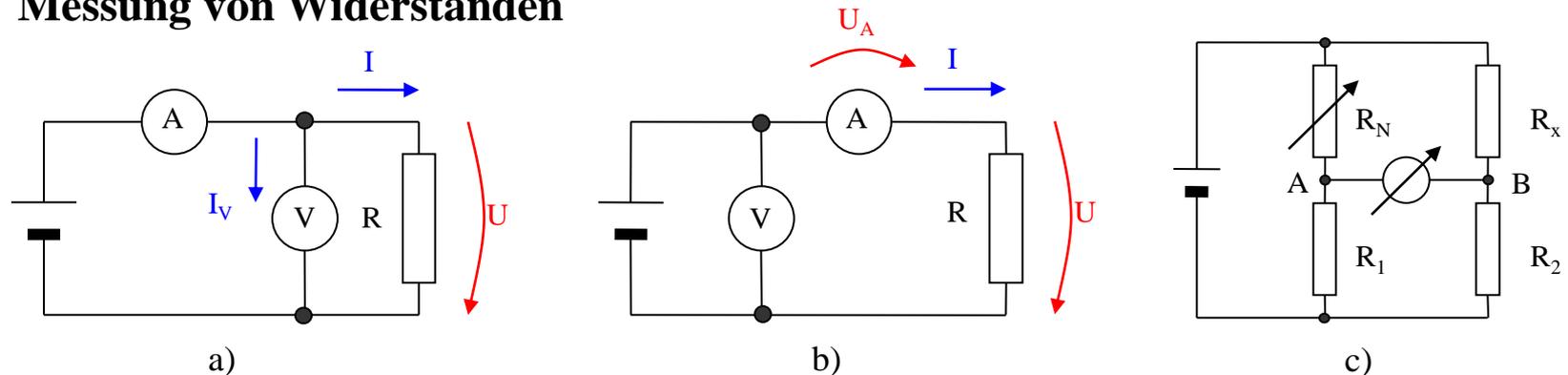
$$R_{\vartheta} = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta\vartheta) \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta = \vartheta_1 - 20^{\circ}$$

Zusätzliche Anforderungen:

- Maximale Leistungs- Strombelastbarkeit,
- Temperaturstabilität,
- Baugröße und -form,
- Kapazität der Kappen und Wicklung,
- Induktivität von Wicklung und Leitungen,
- Spannungsfestigkeit bei Hochspannungseinsatz,
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen.



Messung von Widerständen



- a) Es wird der Strom $I_m = I_v + I$ gemessen, während die Spannung U richtig gemessen wird,
 b) Es wird der Strom I richtig gemessen, aber die Spannung $U_m = U_A + U$.
 c) Brückenschaltung → Vergleichsmethode

Aufgabe

Zwei Adern eines Telefonkabels (Durchmesser je 0,3 mm) bestehen aus Kupfer mit $\kappa = 56 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$ und haben einen Kurzschluss bei einem Widerstand von $2 \text{ k}\Omega$.

Frage: Wie lang ist eine Ader, in welcher Entfernung liegt der Fehler?

Aufgabe

Das gleiche Kabel wird zum Anschluss eines Lautsprechers mit 4Ω benutzt, der 50 m von der Bühne entfernt ist.

Frage: Welcher Widerstand kommt zu den 4Ω dazu und verringert damit den Strom?

3.3 Kirchhoff'sche Sätze sowie Reihen- und Parallelschaltung

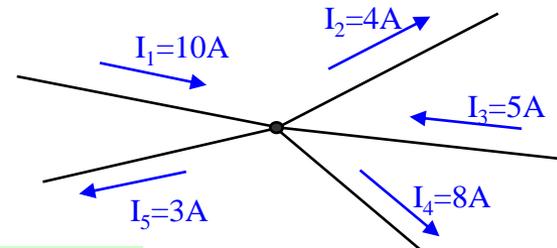
Knotenpunkt und Maschensatz sind wichtige und hilfreiche **Bilanzgleichungen**

Knotenpunktsatz von Kirchhoff

$$\sum_{\uparrow} I_v = \sum_{\downarrow} I_{\mu}$$

I_v zufließende und I_{μ} abfließende Ströme

$$15 \text{ A} = I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 = 15 \text{ A}$$

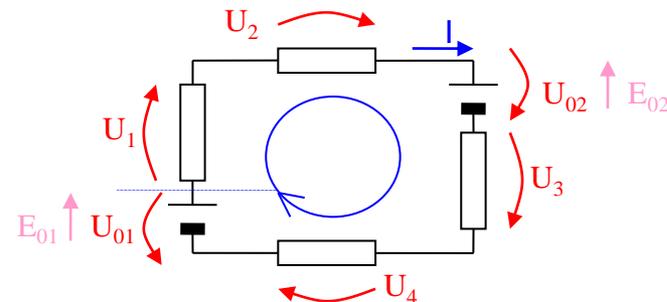


Maschensatz von Kirchhoff

$$\sum U_v = 0$$

mit U_v Spannungsabfälle in gleichem Umlaufsinn

$$U_1 + U_2 + U_{02} + U_3 + U_4 - U_{01} = 0$$

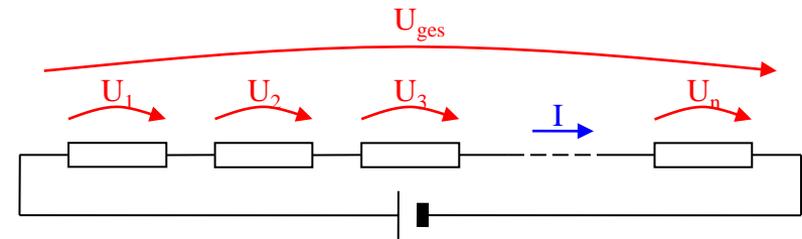


Parallel- und Reihenschaltung, Strom- und Spannungsteilung

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2 + U_3 \dots + U_n \quad | : I$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 \dots + R_n$$

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} \dots = \frac{U_n}{R_n} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}}$$



Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \sum_v R_v$$

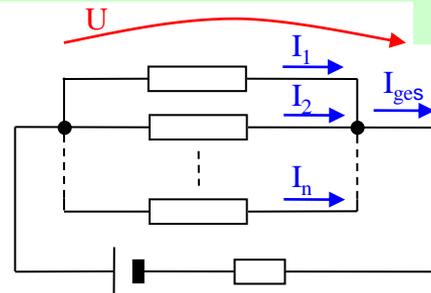
Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}}$$

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_n \quad | : U$$

$$G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_n$$

$$U = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \frac{I_3}{G_3} \dots = \frac{I_n}{G_n} = \frac{I_{\text{ges}}}{G_{\text{ges}}}$$



Parallelschaltung von Widerständen

$$G_{\text{ges}} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_v \frac{1}{R_v} = \sum_v G_v$$

Stromteilerregel bei Parallelschaltung

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1}$$

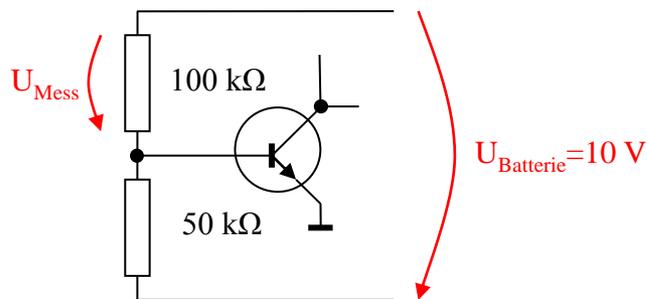
Aufgabe

Für einen Test zur Entladung einer Autobatterie von 12 V soll als Verbraucher ein Widerstand von 6Ω eingesetzt werden. Vorhanden sind 4 Ω Widerstände, die im Dauerbetrieb Wärme bis zu einem Maximalstrom von 1 A abführen können.

Frage: Welche Schaltung ist zu wählen und wie viele Widerstände werden benötigt?

Aufgabe

Bei einer Schaltung (siehe Schaltungsdetail) soll am $100 \text{ k}\Omega$ Widerstand die Spannung gemessen werden. Es steht ein Multimeter mit $10 \text{ k}\Omega/\text{V}$ Eingangswiderstand und einem 10-V-Messbereich (ein etwas älterer Typ) zur Verfügung.



Frage 1: Welcher Messfehler ist zu erwarten?

(Hinweis: Zuerst die Spannung ohne Messgerät berechnen, dann mit Messgerät.)

Frage 2: Welcher Messfehler ist mit einem Multimeter mit messbereichsunabhängigem Eingangswiderstand von $10 \text{ M}\Omega$ (heute Standard) zu erwarten?

3.4 Energieumwandlung und Leistung

Verbrauch elektrischer Energie

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} U dQ = \int_{t_1}^{t_2} U I dt$$

oder $W = U I t_{12}$ für U und I const

Verbrauch elektrischer Leistung

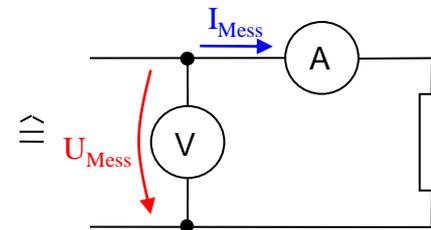
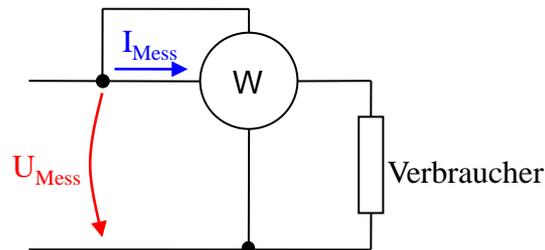
$$P = \frac{dW}{dt} = U I$$

auch $p(t) = u(t) i(t)$ und $P = I^2 R = U^2 / R$ für U und I const

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Messung der elektrischen Leistung und Energie



$p(t)$ wenig aussagefähig → für wichtige Stromarten **andere Parameter** für periodische so auch für rein sinusförmige Ströme und Spannungen

Wirkleistung (physikalisch real) $P_w = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$

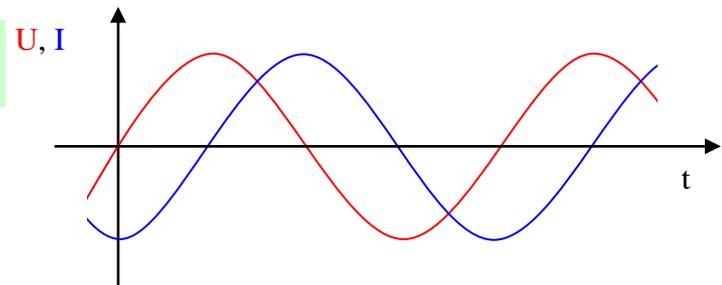
$$P_w = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \sin(\omega t) \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi)$$

Definition von **Blindleistung** und **Scheinleistung**

$$P_b = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad P_s = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \quad P_s^2 = P_w^2 + P_b^2$$

Definition des **Leistungsfaktors**

$$\cos \varphi = \cos \langle u(t), i(t) \rangle$$



Achtung: Blindleistung, Scheinleistung und $\cos \varphi$ nur für reine Sinusform

Aus Wirkleistung können für periodische Größen bessere Kennwerte definiert werden. → **quadratischer Mittelwert**

Definition des Effektivwertes

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

und für Sinusspannung $U_{\text{eff}} = \hat{U} / \sqrt{2}$

und für Sinusstrom $I_{\text{eff}} = \hat{I} / \sqrt{2}$

Es werden:

$$\begin{aligned}
 P_s &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} &= \hat{U} \hat{I} / 2 && \text{bei Sinusform} \\
 P_w &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi &= (\hat{U} \hat{I} / 2) \cos\varphi && \text{bei Sinusform} \\
 P_b &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi &= (\hat{U} \hat{I} / 2) \sin\varphi && \text{bei Sinusform}
 \end{aligned}$$

Für nichtsinusförmige periodische Größen werden ähnliche **erweiterte Definitionen** wie P_b , P_s und $\cos\varphi$ (→ λ) bereitgestellt.

Aufgabe

Ein Widerstand von 470Ω ist für eine Wärmeabgabe von $1/8 \text{ W}$ im Dauerbetrieb ausgelegt.

Frage 1: Wie groß ist der maximale Strom in einer Gleichstromschaltung?

Frage 2: Wie groß ist der Effektivwert des maximalen Stromes bei Wechselstrom?

(Hinweis: Für einen Widerstand gilt $\cos\varphi=1$.)

Aufgabe

Eine 100 W Glühlampe hat einen Wirkungsgrad von 5% und soll durch eine Energiesparlampe mit gleicher Lichtleistung ersetzt werden.

Frage: Welche elektrische Leistung muss die Energiesparlampe haben, wenn sie einen Wirkungsgrad von 25% besitzt?

Zusatzfrage: Welche Leistung müsste ein LED-Array mit $\eta = 40 \%$ haben?

Aufgabe

Ein Audioverstärker hat eine Ausgangsspannung von $U_{\text{eff}} = 20 \text{ V}$. Es kann ein Lautsprecher mit einem Widerstand $R_L \geq 4 \Omega$ angeschlossen werden.

Frage 1: Welche Leistung kann maximal entnommen werden?

Frage 2: Welche Leistung kann von einem Lautsprecher mit 8Ω entnommen werden?

Frage 3: Wie sind zwei Lautsprecher mit je 8Ω anzuschließen?