

Theoretische Grundlagen und ihre Anwendung zur Analyse elektrotechnischer Prozesse

Bezeichnung	Vorgänge im elektrischen Leiter (Strömungsfeld)	Vorgänge im elektrischen Nichtleiter (elektrostatisches Feld)
Ladung Naturgröße	$Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt$	Q $\rho = dQ/dV$ $Q = N \cdot q_0 = \int_V \rho \, dV$ $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}$ $[Q] = \text{C} = \text{As}$
Fluss- bzw. Stromgröße	I $I = dQ/dt$ $I = \int_{\text{Fläche}} S \cdot dA$ $[I] = \text{A}$	Ψ $\Psi_{\text{ges}} = Q$ $\Psi = \int_{\text{Fläche}} D \cdot dA$ $[\Psi] = \text{As}$
Knotenpunktsatz	$\oint S \cdot dA = 0$	$\oint D \cdot dA = Q_{\text{innerhalb}}$
Flussdichte bzw. Stromdichte	S $ S = dI/dA$ $S = v_d \rho$ $[S] = \text{A/m}^2$	D $ D = d\Psi/dA$ $[D] = \text{As/m}^2$
Feldstärke	$E = F/Q_p$ $ E = dU/dl$ $[E] = \text{V/m}$	$E = F/Q_p$ $ E = dU/dl$ $[E] = \text{V/m}$
Spannungsgr. Ursprung	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} E \cdot ds$ $[U] = \text{V}$	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} E \cdot ds$ $[U] = \text{V}$
Maschensatz	$\oint E \cdot ds = E_0$	$\oint E \cdot ds = E_0$
Beziehung Flussdichte und Feldstärke	$S = \kappa E$	$D = \epsilon E$
Materialkonstante	$\kappa = \text{spez. Leitw.}$ $\rho = \text{spez. Wid.}$	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$

Theoretische Grundlagen und ihre Anwendung zur Analyse elektrotechnischer Prozesse

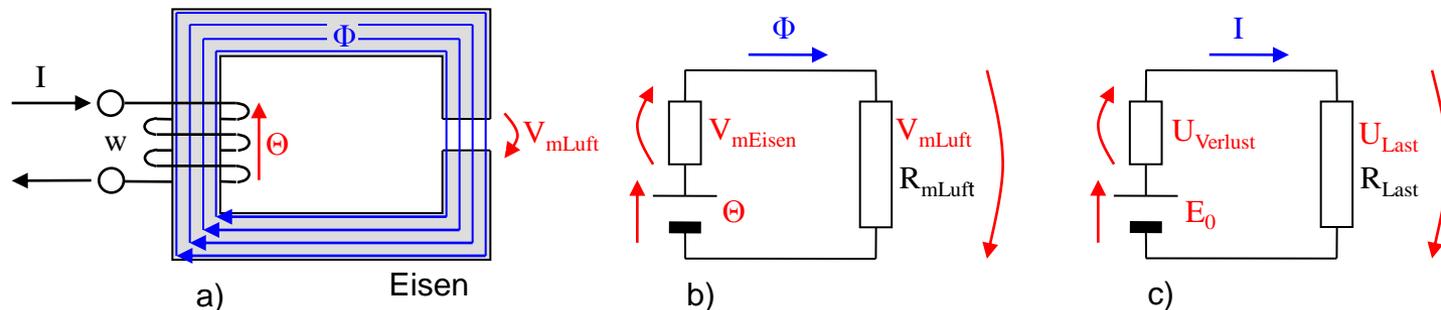
Beziehung Flussgr. und Spannungsgr.	$U = R I$ $I = G U$	$U = (1/C) Q$ $Q = C U$
Definition:	$R = U/I$ $[R] = \Omega = V/A$	$C = Q/U$ $[C] = F = As/V$
Bemessung: homogene Verhältnisse	$R = \frac{l}{\kappa A} = \frac{\rho l}{A}$	$C = \frac{\epsilon A}{d}$
Energie	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ Verlustenergie $W_{12} = U I t_{12}$ für $u, i = \text{const}$ $[W] = Ws = VAs$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ gespeichert bei Q, U $[W] = Ws = VAs$
Leistung	$p(t) = dW/dt = u i$ $P = UI = U^2/R = I^2R$ für $u, i = \text{const}$ $[P] = W = VA$	$p(t) = u i$
Kräfte auf Ladungen bzw. Strom bzw. zwischen Q bzw. I auf Grenzflächen	nicht direkt	$F = Q E$ $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}$ Coulomb'sches Gesetz $F = \frac{Q^2}{2A} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$ $= \frac{D^2}{2\epsilon_0} A = \frac{DE}{2} A = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} A$

5. Vorgänge im Magnetfeld

5.1 Grundbegriffe für magnetische Größen

Bei Versuchen stellte Oersted zufällig fest, dass eine Magnetnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters ausschlägt.

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung der Vorgänge im Magnetfeld ist die **Analogie** zum elektrischen Strom, der Spannung und insgesamt dem elektrischen Feld.



a) Skizze, b) symbolischer magnetischer Kreis aus Eisen, c) Stromkreis

Die **bewegten Ladungen** des Stromes bewirken eine **magnetische Ursprung** Θ .

Experimentell nachgewiesen: $\Theta \sim I$ und $\Theta \sim w$.

Durch Wahl der **Maßeinheit** wird der Proportionalitätsfaktor = 1.

magnetische Ursprung oder Durchflutung

$$\Theta = I w$$

Von der magnetischen Ursprung „angetrieben“ fließt „als Vorstellung“ ein **magnetischer Fluss** Φ im geschlossenen Kreislauf.

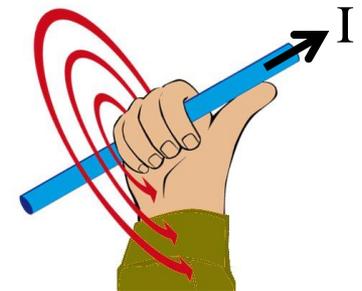
magnetischer Fluss

$$\Phi$$

magnetische Flussdichte

$$|\mathbf{B}| = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}}$$

mit $\mathbf{B} = |\mathbf{B}| \mathbf{e}_{\Phi}$ und $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$
Querschnittsfläche



Rechte-Hand-Regel

Das entspricht einem Vektorfeld – dem Feld der magnetischen Flussdichte.

Weiterhin wird in **Analogie** zum Spannungsabfall des **elektrischen Stromkreises** ein **magnetischer Spannungsabfall** V_m ebenfalls in Flussrichtung (entlang eines Wegabschnittes des Flusses) definiert.

magnetischer Spannungsabfall

$$V_m$$

Selbstverständlich gelten auch analoge **Zählpfeilrichtungen** für magnetischen Fluss, Spannungsabfall und Ursprungung. ■

magnetisches Feld

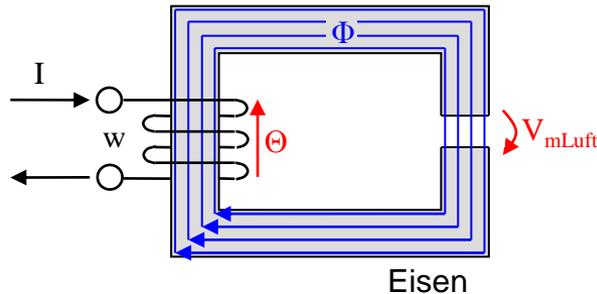
analog aus V_m definiert

$$\mathbf{H} = \frac{dV_m}{ds} \mathbf{e}_\Phi \quad (\text{genauer } \mathbf{H} = \mathbf{grad} V_m \text{ und } V_m = \int_{\text{Weg}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s})$$

Durch experimentelle Untersuchungen wurde mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gefunden, dass

- die **Richtungen** von \mathbf{B} und \mathbf{H} immer gleich sind
- und sie über die **Materialkonstante** μ (Permeabilität) zusammenhängen.

Zusammenhang: $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$



aus der Definitionsgleichung:

$$V_m = R_m \Phi$$

magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi}$$

Für ein homogenes Feld folgt:

Bemessungsgleichung des magnetischen Widerstands

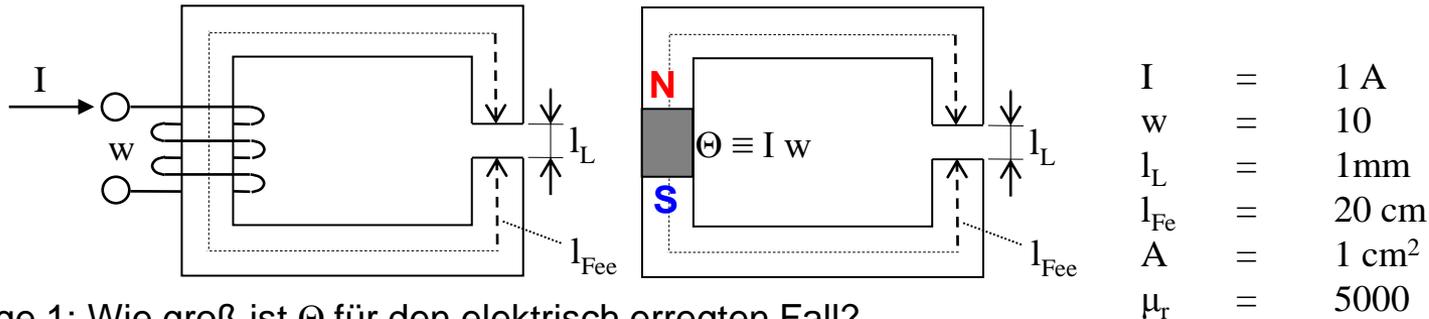
$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$$

Eine mit \mathbf{v} bewegte Punktladung ergibt nach der **Relativitätstheorie**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad \Phi = \int_{\text{Fläche}} d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad V_m = \int_{\text{Weg}} ds \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

Aufgabe 5.1.1

Für Darstellung unten gegeben (vereinfachte Anordnung wie bei kleinen Transformatorkern, bei Gleichstrom auch Ersatz durch Permanentmagnet):



Frage 1: Wie groß ist Θ für den elektrisch erregten Fall?

Frage 2: Wie groß sind die magnetischen Widerstände R_{mL} und R_{mFe} ?

Frage 3: Wie groß sind der magnetische Fluss und die Flussdichte?

Frage 4: Wie groß sind H_L , H_{Fe} , V_{mL} und V_{mFe} ?

Hinweis: Inhomogenität der Ecken vernachlässigen (mittlere Länge); Luftspalt kein Feld nach außen

Aufgabe 5.1.2

Lange einlagige Luftspule mit 1000 Windungen, 50 cm Länge, 5 cm \emptyset wird von 1 A durchflossen.



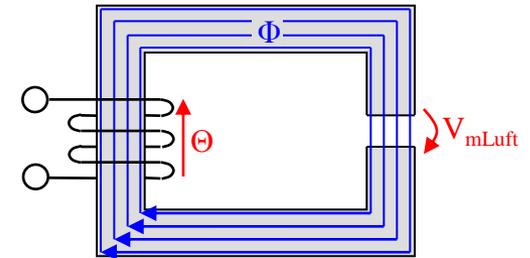
Frage: Wie groß sind der magnetische Widerstand und die Flussdichte?

Hinweis: Lange Spule innen näherungsweise homogenes Feld, außen Feld vernachlässigbar

Das Durchflutungsgesetz

Ein **Maschensatz** gilt analog und wurde experimentell bestätigt. Dieser hat für das Magnetfeld eine **weiterreichende Bedeutung**. Er stellt die **Wandlung** oder den Übergang von **elektrischen zu magnetischen** Größen dar.

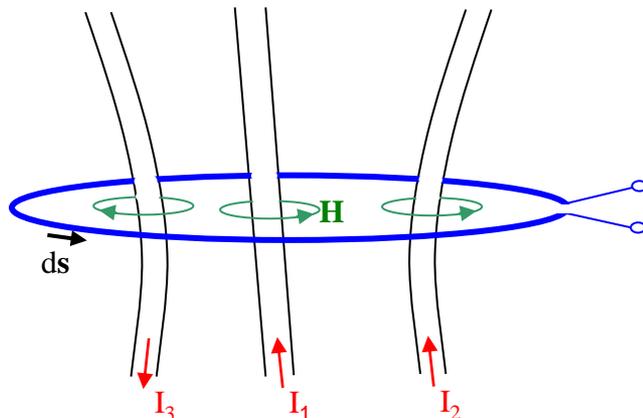
$$\sum \oint V_{m\mu} = \sum \oint \Theta_v = \Theta_{ges} = Iw = \sum I_{umfasst}$$



Durchflutungsgesetz

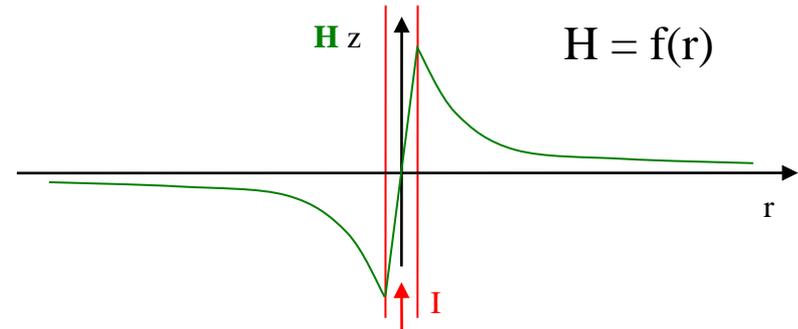
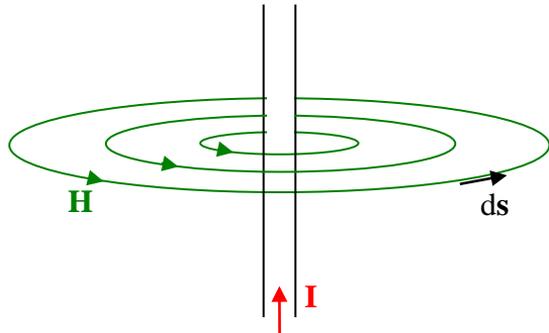
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum I_{umfasst}$$

in gleichem Umlaufsinn gezählt



Umlaufsumme (Ringintegral) kann mit einer **Rogowskispule** nachgewiesen werden.

Beispiel: Feld eines unendlich langen geraden Leiters



Auf einem konzentrischen Kreis um den Leiter muss der Betrag von \mathbf{H} konstant sein!

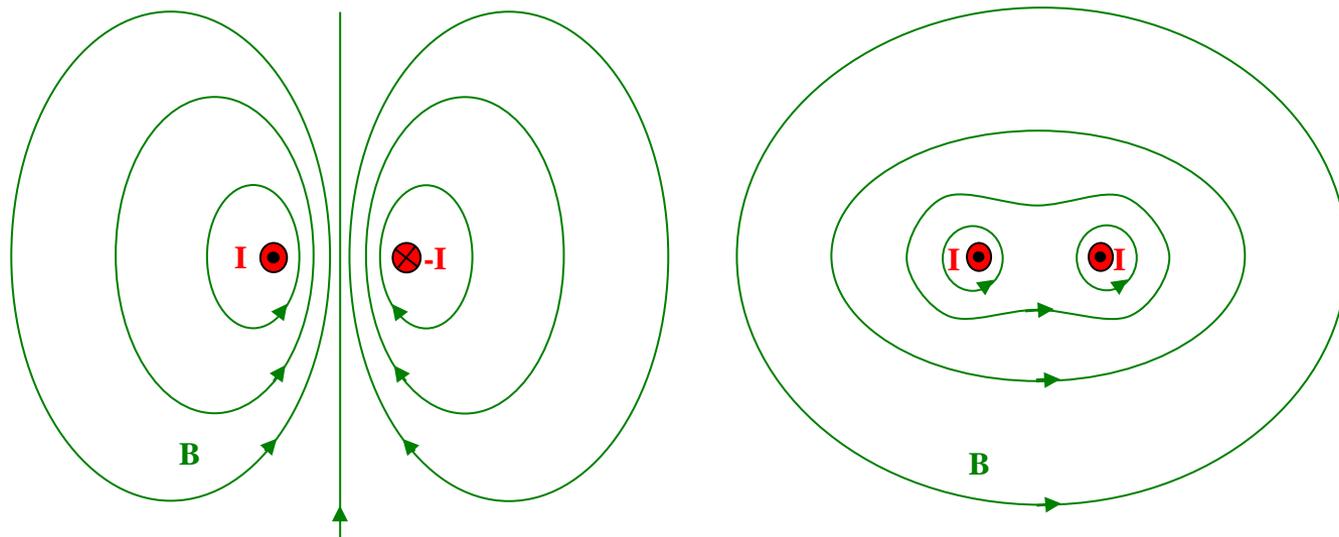
$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H \oint ds = H 2\pi r = I \quad \text{d.h.} \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

Innerhalb des Leiters wird nur ein anteiliger Strom umfasst (Anteil $\pi r^2 / \pi r_{\text{Leiter}}^2$).

Durch die Gültigkeit des **Superpositionsprinzips** können durch Addition die Felder mehrerer Leiter (gleich oder entgegen gerichtete Ströme) bestimmt werden.

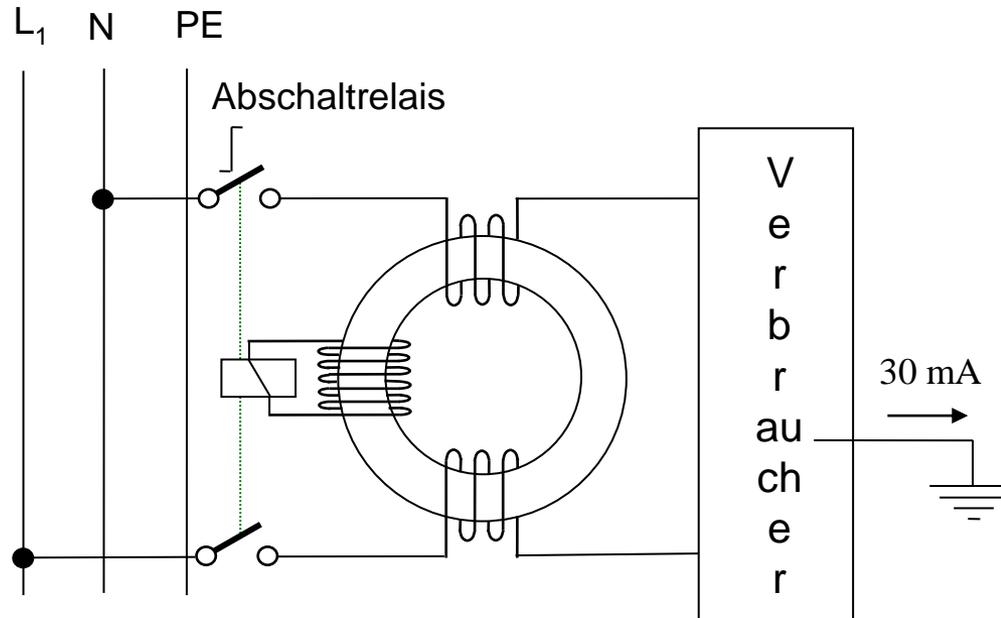
Feldbilder verwendete schon **Faraday** als einfache Form zur qualitativen Darstellung von Vorgängen im Magnetfeld.

- Dazu werden grob die **Flussdichtelinien vom Nord- zum Südpol** bzw. um die Leiter gezeichnet.
- Als Regel gilt, dass sich diese Feldlinien **nie schneiden oder kreuzen**, sie müssen sich den Platz teilen.



- Wo Feldlinien **verdichtet** sind, entstehen Kräfte, die diese **auseinanderdrücken**.
- Wo Feldlinien **verdünnt** sind, entstehen Kräfte, die diese **zusammenziehen**.
- Kräfte versuchen immer, Feldlinien **im ungünstigeren Material zu verkürzen**.

Aufgabe 5.1.3



Ein FI-Schalter nutzt zuerst mal das Durchflutungsgesetz.
Er schaltet z.B. bei einem Fehlerstrom von 0,03 A den Stromkreis ab.

Frage 1: Wie ist die Funktionsweise eines FI-Schalters?

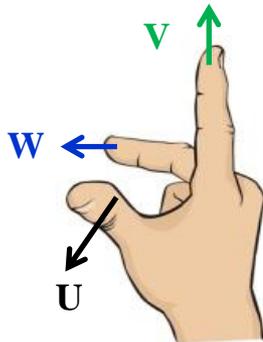
Frage 2: Welche magnetische Ursprungsspannung steht zur Verfügung, wenn 30 mA über die Erde zurückfließen ($w = 5$), und wird mit dem „Rogowskispulenersatz“ (Auslösespule) gemessen?

Lorentzkraft

Die **Kraft zwischen zwei bewegten Ladungen** wurde von **Lorentz** gefunden und sie entspricht der Kraft einer bewegten Probeladung im Magnetfeld einer sich bewegenden Ladung

Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = Q_p \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}$$



Richtungen nach der

U V W – Regel mit der rechten Hand

Daumen

– Ursache

\mathbf{v}_p

Zeigefinger

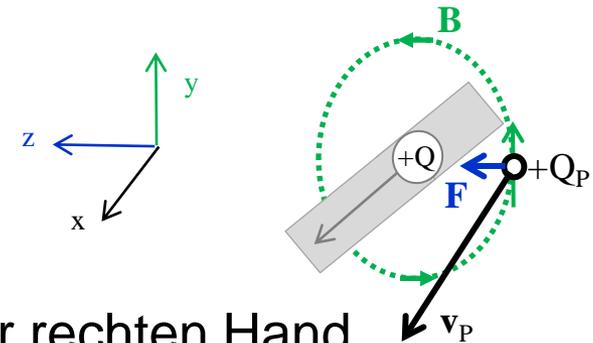
– Vermittlung

\mathbf{B}

Mittelfinger (abgewinkelt)

– Wirkung

\mathbf{F}



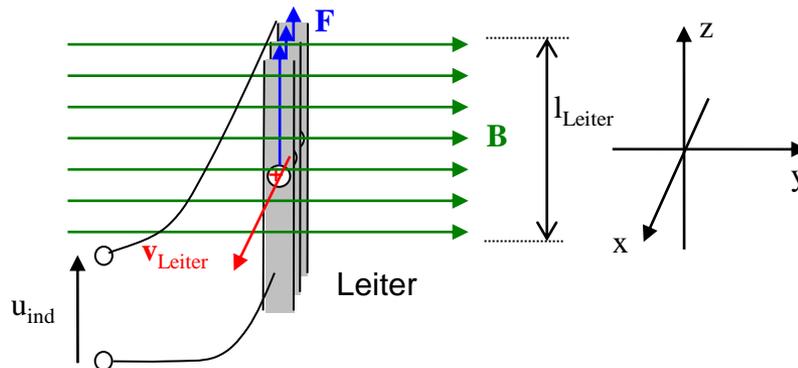
Vermittlung bedeutet hierbei, die magnetische Flussdichte vermittelt, bewirkt aber **keine Energieveränderung**.

Das ist darin begründet, dass die **Kraft immer senkrecht** auf der momentanen Bewegungsrichtung steht.

Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz tritt bei experimentellen Untersuchungen in zwei Formen auf. Die **Bewegungsinduktion** und die **Ruheinduktion**.

Prinzip der Bewegungsinduktion



Richtung der Spannung u_{ind} nach der **Rechten-Hand-Regel**
 Daumen in Flussrichtung, dann zeigen die **gekrümmten Finger** um den Fluss mit den **Fingerspitzen zur Zielklemme**.

Stromfluss \rightarrow Spannungsabfall umgekehrt

$$u_{\text{ind}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}}$$

mit $\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p$
 $\mathbf{F} = Q_p \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}$

Induktionsgesetz Bewegungsinduktion

$$u_{\text{ind}} = - (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{\text{Leiter}} = - v_x B_y l_z$$

Lenz'sche Regel ist unmittelbar erfüllt (nach UVW-Regel).

mit $B_y \cdot l_z \cdot v_x = B_y \cdot l_z \cdot dx/dt = B_y \cdot (-dA_{LS}/dt) = -d\Phi_{LS}/dt$

(**Bewegung** des Leiters nach vorn **wird** den Fluss **verkleinern**)

$$u_{\text{ind}} = - \left(- \frac{d\Phi_{LS}}{dt} \right) = \frac{d\Phi_{LS}}{dt}$$

Richtung von u_{ind} unverändert
nach der **Rechten-Hand-Regel**

Wichtig: zur Berechnung einer Anordnung nur **einen Betrachtungsstandpunkt**

- bewegter Leiter in zeitkonstantem Magnetfeld **oder**
- ruhender Leiter (Leiterschleife) im zeitveränderlichen Magnetfeld

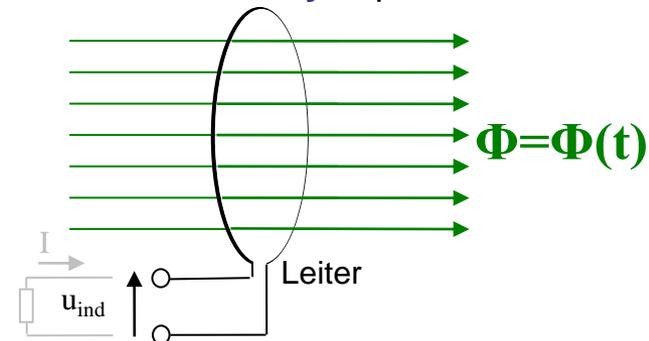
Prinzip der Ruheinduktion

zeitveränderliches Magnetfeld (z.B. durch zeitveränderlichen Strom)

Das Prinzip kann aus obiger Formel gefolgert werden, es wurde von **Faraday** experimentell gefunden.

Induktionsgesetz Ruheinduktion

$$u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi}{dt}$$



Richtung von u_{ind} wiederum nach der **Rechten-Hand-Regel**

Die **Lenz'sche Regel** ist auch hier unmittelbar erfüllt.

Liegt eine **Bewegung** in einem **zeitveränderlichen Feld** vor, sind beide Teile zu beachten. Dabei ist der **Betrachtungsstandpunkt** eindeutig zu wählen.

Induktionsgesetz insgesamt

$$u_{\text{ind}} = w \frac{d\Phi_{\text{LS}}}{dt} - (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{\text{aller Leiter}}$$

Nach der speziellen **Relativitätstheorie** folgt für einen zeitveränderlichen Strom **im Beobachtungssystem S'** ein **zeitkonstantes Feld**.

(S' – mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stromänderung – Lichtgeschwindigkeit des Leitermaterials c_{Kupfer} – mitbewegt)

Auf diese Weise wird die **Ruheinduktion** auf die **Lorentzkraft** zurückgeführt.

Ladungsträger einer **Leiterschleife** (in S ruhend) bewegen sich **mit c_{Kupfer} in S'** .

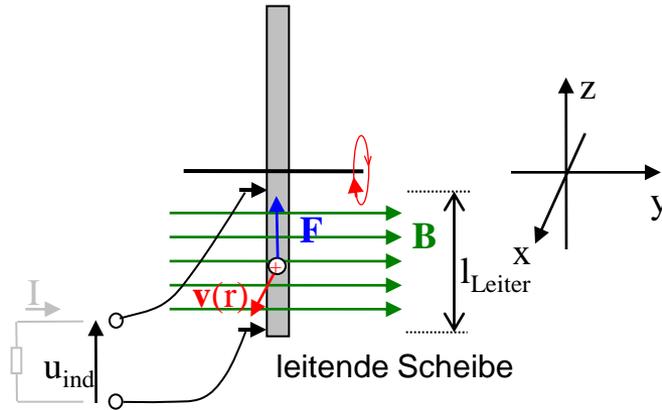
(in umgekehrte Richtung wie S' sich bewegt)

Es kann mit der **Bewegungsinduktion** gerechnet und mit der **Lorentztransformation** zurücktransformiert werden.

Damit folgt die **Ruheinduktion** ebenfalls aus einer **Kraft auf bewegte Ladungen**; hierbei ist das **Prinzip der Stromausbreitung im Leiter** zu berücksichtigen.

Aufgabe 5.1.4

Eine angetriebene Kupferscheibe rotiert in einem konstanten Magnetfeld (Unipolarmaschine). Schleifkontakte bei r_{innen} und $r_{\text{au\ss en}}$ mit $r_{\text{au\ss en}} - r_{\text{innen}} = l_{\text{Leiter}}$



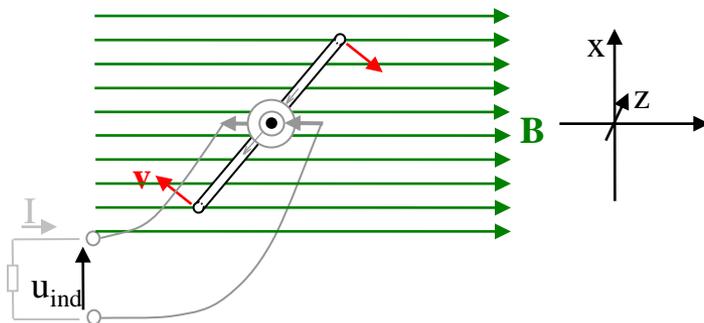
Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese konkrete Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} ?

Hinweis: Da der Betrag $|\mathbf{v}(r)|$ von r abhängt, für jedes „ dr “ berechnen und integrieren.

Aufgabe 5.1.5

Im konstanten Magnetfeld rotiert dünne Spule (w Windungen). Induzierte Spannung über Schleifringe (grauen Pfeile \rightarrow Rechte-Hand-Regel). Die w Leiterschleifen zeigen nach hinten (z – Richtung, Länge l_z) und sind im Querschnitt zu sehen (Durchmesser $2 r_s$).



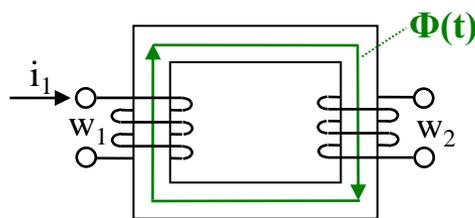
Frage 1: Welche Standpunkte sind für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} jeweils für diese Standpunkte?

Hinweis: Nur Komponente von \mathbf{v} senkrecht zu \mathbf{B} \rightarrow Beitrag; Kräfte senkrecht zum Leiter \rightarrow kein u_{ind} , Nur Komponente der Spulenfläche senkrecht zum Fluss

Aufgabe 5.1.6

In einem Eisenkreis erzeugt i_1 einen zeitveränderlichen magnetischen Fluss.



$$\begin{aligned}
 i_1 &= (1 \text{ A}) \sin(2\pi 50 \text{ Hz} \cdot t) \\
 w_1 &= 10 \\
 l_{\text{Fe}} &= 20 \text{ cm} \\
 A &= 1 \text{ cm}^2 \\
 \mu_r &= 5000 \\
 w_2 &= 100
 \end{aligned}$$

Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} an w_2 (Richtung und Größe)?

Hinweis: Alle Flüsse außerhalb des Eisenkerns werden vernachlässigt.

Zusatzaufgabe 5.1.7

Warum sind Ruhe- und Bewegungsinduktion beide erforderlich? Erläutern Sie in Auswertung von der drei vorangegangenen Aufgaben!

Aufgabe 5.1.8

Im zeitveränderlichen magnetischen Störfluss $B = 0,002 \text{ Vs/m}^2 \sin(2\pi 50 \text{ Hz } t)$ befinden sich über $l=10 \text{ m}$ eine parallele Zweidrahtleitung (Abstand $d=1 \text{ mm}$), eine verdrehte Zweidrahtleitung (Abstand d , Länge einer Verdrillung 3 cm) und ein Koaxialkabel (Durchmesser $2d$). B ca. Energieleitung mit 10 A .

Frage: Welche Störspannungen werden bei ungünstigster Orientierung induziert?

Hinweis: Von verdrehter Zweidrahtleitung im ungünstigsten Fall ungerade Zahl

Verdrillungen im Feldbereich. Koaxialkabel \rightarrow viele Leiterschleifen als Kreissegmente $d\alpha$, deren Spannungen „parallel“ geschaltet sind. Dicken der Leiter vernachlässigen.