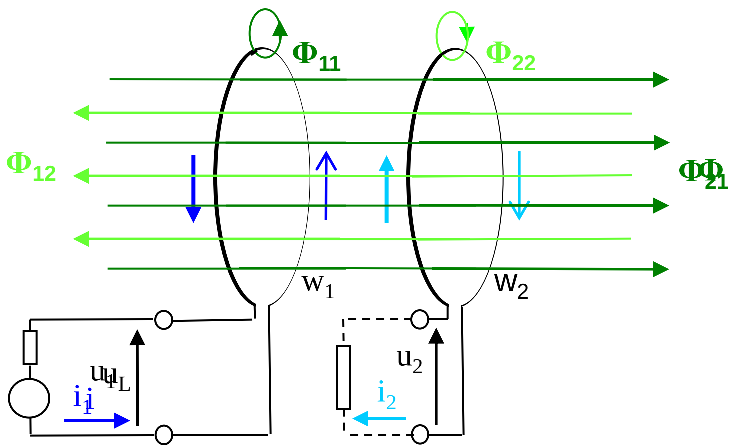
Für die meisten Anwendungen ist es hilfreich die Ruheinduktion in **Selbst- und Gegeninduktion** zu unterteilen.

Richtungen immer nach der Rechten-Hand-Regel



$$u_1 = u_{ind11} - u_{ind12} \quad \text{und}$$

$$u_2 = u_{ind21} - u_{ind22}$$

$$u_1 = w_1 \frac{d\Phi_{11}(i_1)}{dt} - w_1 \frac{d\Phi_{12}(i_2)}{dt} \quad \text{und}$$

$$u_2 = w_2 \frac{d\Phi_{21}(i_1)}{dt} - w_2 \frac{d\Phi_{22}(i_2)}{dt}$$

nur Selbstinduktion

$$u_L = w \frac{d\Phi(i)}{dt}$$

mit Gegeninduktion

$$u_{ind11} = w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad \text{und}$$

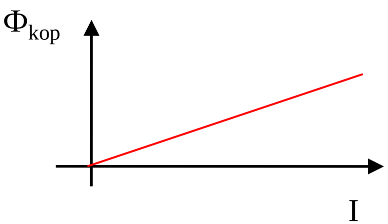
$$u_{ind21} = w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

$$u_{ind12} = w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und}$$

$$u_{ind22} = w_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt}$$

5.2 Koppelfluss, Strom und Spannung an der Spule

Der **Koppelfluss** ist der Fluss einschließlich seiner Verkopplung mit den entsprechenden Windungen. Bei 100 % Kopplung ist der Fluss mit allen w Windungen vollständig verkoppelt $\Phi_{kop} = w\,\Phi$.



Definition der Induktivität

$$L = \frac{\Phi_{kop}}{I}$$

Definitionsgleichung: $\Phi_{kop} = L \cdot I$

Wie die Kapazität wird die Induktivität aus einem statischen Zusammenhang definiert.

Bei nichtlinearem Zusammenhang muss entweder die Funktion $\Phi_{kop} = \Phi_{kop}(I)$ oder $L = L(I)$ bzw. $L = L(\Phi_{kop})$ gefunden werden.
Das führt bei ferromagnetischen Materialien zur **Hysteresekurve**.

Bemessungsgleichung der Induktivität

$$L = \frac{w^2}{R_m}$$

$$\Phi_{kop} = w\Phi = \frac{w\Theta}{R_m} = \frac{w^2 I}{R_m} = \left(\frac{w^2 I}{l/\mu A}\right)$$

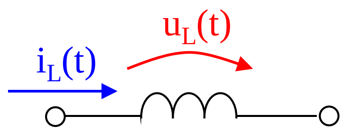
Ändert sich der Strom an den Klemmen eines Bauelementes „Spule“ (Zunahme oder Abnahme), muss sich die Spannung entsprechend der Selbstinduktion einstellen.

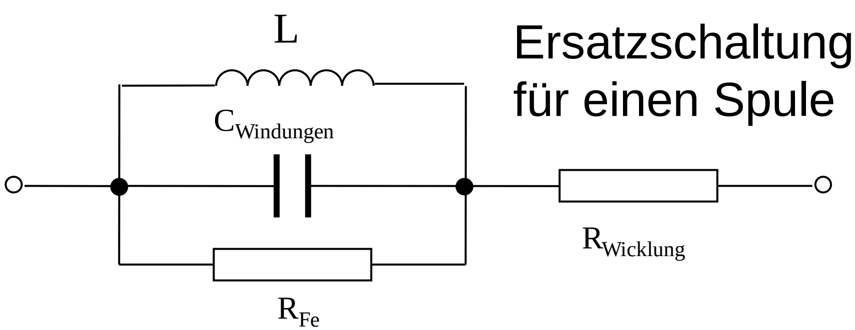
Wird für die Selbstinduktion $u(t) = w\, d\Phi/dt = d\Phi_{kop}/dt$ der Koppelfluss durch die Beziehung $\Phi_{kop} = L\, I$ ersetzt folgt:

Strom und Spannung an der Induktivität

$$u_L(t) = \frac{d(\Phi_{kop})}{dt} = \frac{d(L\, i_L)}{dt} = L\, \frac{di_L}{dt}$$ für L = const

Umkehrung $i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(t)\, dt + i_L(t=0)$





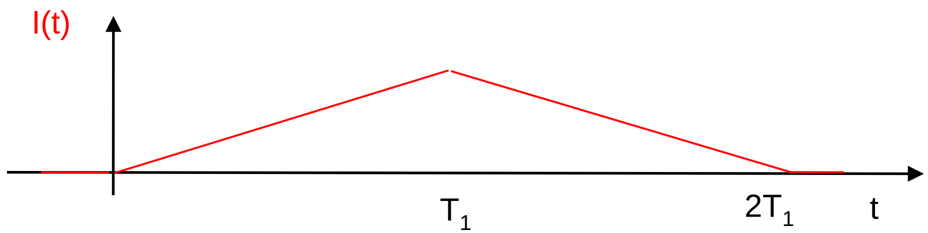
Ersatzschaltung für einen Spule

Verbraucherpfeilsystem

d.h.: bei Stromanstieg positive; bei Stromabnahme negative Spannung.

Aufgabe 5.2.1

Gegeben ist der Stromverlauf an einer Induktivität in folgender Abbildung



Frage: Wie sieht der Verlauf der Spannung aus? (In Abbildung einzeichnen!)

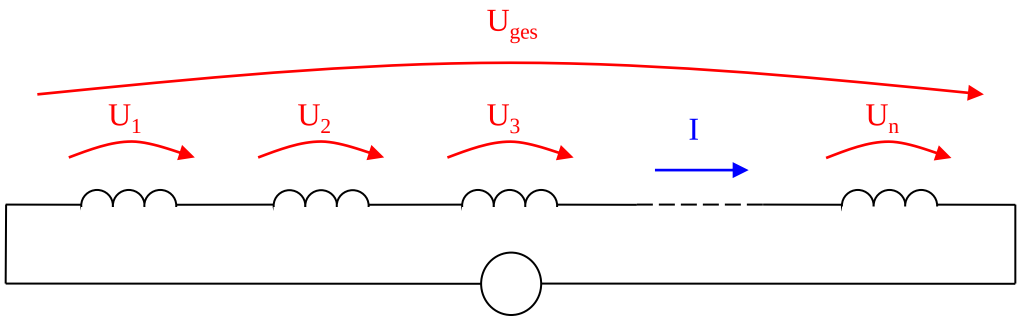
Aufgabe 5.2.2

Zur Herstellung einer Induktivität wurden auf den gewählten Spulenkern 10 Windungen gewickelt und danach eine Induktivität von $5\ \mu\mathrm{H}$ gemessen.

Frage: Wann reicht so ein Verfahren, um die notwendige Windungszahl zu ermitteln und wie viel Windungen werden in diesem Fall für $1\ \mathrm{mH}$ benötigt?

Anwendung der Kirchhoff'schen Sätze

Achtung: Das Folgende gilt bei rein elektrischer Zusammenschaltung, es darf keine zusätzliche magnetische Verkopplung vorliegen!



$$u_{ges} = u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n \quad \Big| : di/dt$$

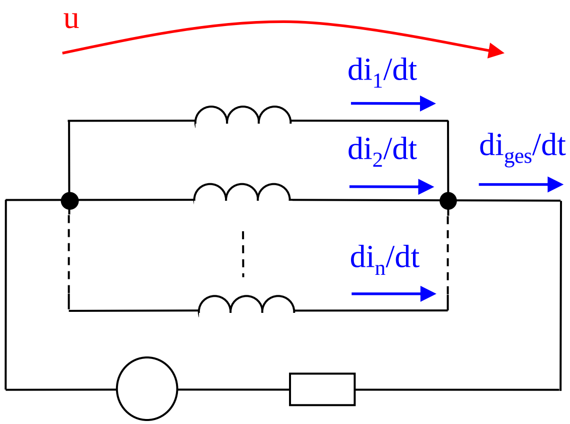
$$L_{ges} = L_1 + L_2 + L_3 \ldots + L_n$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_1}{L_1} = \frac{u_2}{L_2} = \frac{u_3}{L_3} \quad \ldots \quad = \frac{u_n}{L_n} = \frac{u_{ges}}{L_{ges}}$$

Reihenschaltung von Induktivitäten und **Spannungsteilerregel**

$$L_{ges} = \sum_{\nu} L_{\nu}$$

$$\frac{u_1}{u_{ges}} = \frac{L_1}{L_{ges}}$$



$$di_{ges}/dt = di_1/dt + di_2/dt + di_3/dt \ldots + di_n/dt \quad \Big| :u$$

$$1/L_{ges} = 1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3 \ldots + 1/L_n$$

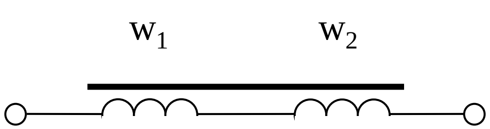
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \ldots \quad = L_n \frac{di_n}{dt} = L_{ges} \frac{di_{ges}}{dt}$$

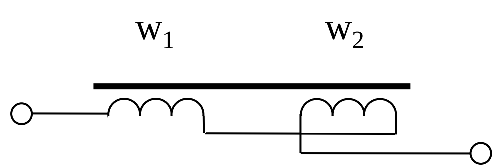
Parallelschaltung von Induktivitäten und **Stromteilung**

$$1/L_{ges} = \sum_{\nu} 1/L_{\nu}$$

$$\frac{i_1}{i_{ges}} = \frac{L_{ges}}{L_1}$$

Wesentlich komplexer werden die Verhältnisse, wenn zusätzlich eine **magnetische Verkopplung** vorliegt. Z.B. Kopplung von 100 %





$$L_{ges} = \frac{(w_1 \pm w_2)^2}{R_m} = \left(\frac{w_1}{\sqrt{R_m}} \pm \frac{w_2}{\sqrt{R_m}} \right)^2 = \left(\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2} \right)^2$$

5.3 Energie und Kräfte im magnetischen Feld

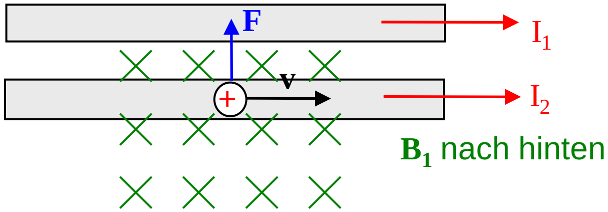
$$W = \int_0^t u_L(t)\, i_L(t)\, dt$$ wird $$W = \int_0^{I_L} i_L(t)\, L\, di_L = L\frac{I_L^2}{2}$$ und mit $\Phi_{kop} = L\,I$ wird

$$W = \frac{L\,I_L^2}{2} = \frac{\Phi_{kop}\,I_L}{2} = \frac{\Phi_{kop}^2}{2\,L}$$

Diese Energie ist in der Induktivität **gespeichert**, wenn sie Φ_{kop} und I_L erreicht hat.

Im magnetischen Feld zwei Erscheinungsformen für **Kraftwirkungen** auf **bewegte Ladungen** und auf **Grenzflächen** (z.B. Eisen − Luft).

Kräfte auf bewegte Ladungen



für $I_2 = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A} = \rho\, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{A} = (Q/l_{Leiter})v_2$

und damit $Q\,\mathbf{v}_2 = I_2\,\mathbf{l}_{Leiter}$

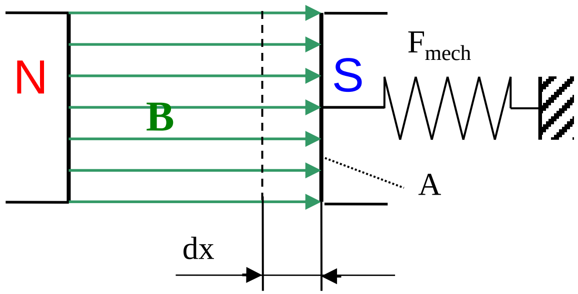
$$\mathbf{F} = Q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F} = I_2\,\mathbf{l}_{Leiter} \times \mathbf{B}_1$$

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi\, r}\, l_{Leiter}$$ mit $|\mathbf{B}_1| = \mu\, I_1/2\pi r$

Für Magnetfelder besteht ebenfalls das Superpositionsprinzip.

Kräfte auf Grenzflächen



Energiebilanz für Φ konstant

verringerte magnetische Energie = mechanisch in der Feder gespeicherte Energie

$$\Delta W_{magn} = \frac{\Phi_{kop}^2\, dx}{2\, w^2 \mu_0 A}\left(\frac{1}{\mu_{rLuft}} - \frac{1}{\mu_{rFe}}\right) = F_{mech}\, dx$$

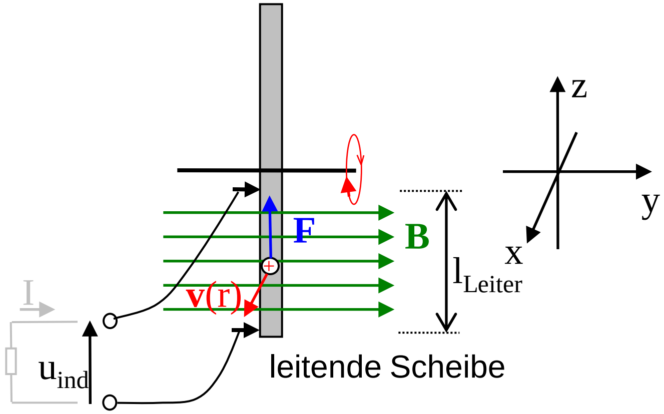
mit $B = \Phi/A$, $\Phi_{kop}/w = \Phi$
und $\mu_{rFe} >> \mu_{rLuft} = 1$

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{B\,H}{2} A = \frac{\mu_0\, H^2}{2} A$$

Die **Richtung der Kraft** ist immer so, dass sich die Flussdichtelinien im für den Fluss schlechteren Medium verkürzen.

Aufgabe 5.1.4

Eine angetriebene Kupferscheibe rotiert in einem konstanten Magnetfeld (Unipolarmaschine). Schleifkontakte bei r_{innen} und $r_{außen}$ mit $r_{außen} - r_{innen} = l_{Leiter}$



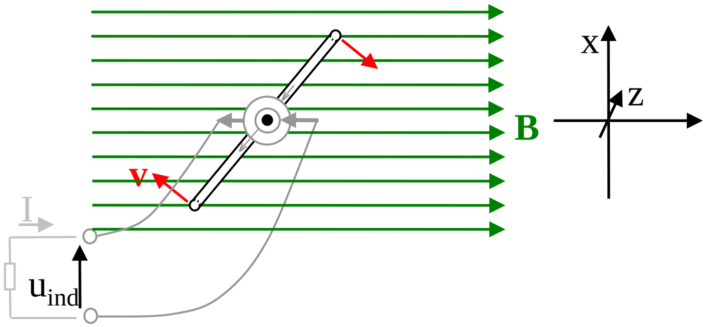
Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese konkrete Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind}?

Hinweis: Da der Betrag $|\mathbf{v}(r)|$ von r abhängt, für jedes „dr" berechnen und integrieren.

Aufgabe 5.1.5

Im konstanten Magnetfeld rotiert dünne Spule (w Windungen). Induzierte Spannung über Schleifringe (grauen Pfeile $\rightarrow$ Rechte-Hand-Regel). Die w Leiterschleifen zeigen nach hinten (z – Richtung, Länge l_z) und sind im Querschnitt zu sehen (Durchmesser $2\,r_s$).



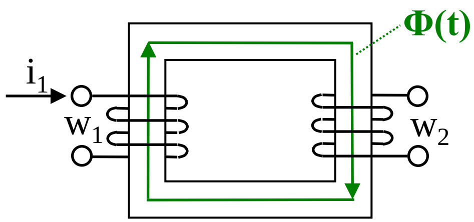
Frage 1: Welche Standpunkte sind für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} jeweils für diese Standpunkte?

Hinweis: Nur Komponente von $\mathbf{v}$ senkrecht zu $\mathbf{B}$ $\rightarrow$ Beitrag; Kräfte senkrecht zum Leiter $\rightarrow$ kein u_{ind}, Nur Komponente der Spulenfläche senkrecht zum Fluss

Aufgabe 5.1.6

In einem Eisenkreis erzeugt i_1 einen zeitveränderlichen magnetischen Fluss.



i_1	=	$(1\ \mathrm{A})\sin(2\pi\ 50\ \mathrm{Hz}\cdot t)$
w_1	=	10
l_{Fe}	=	20 cm
A	=	$1\ \mathrm{cm}^2$
μ_r	=	5000
w_2	=	100

Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese Anordnung möglich?
Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} an w_2 (Richtung und Größe)?
Hinweis: Alle Flüsse außerhalb des Eisenkerns werden vernachlässigt.

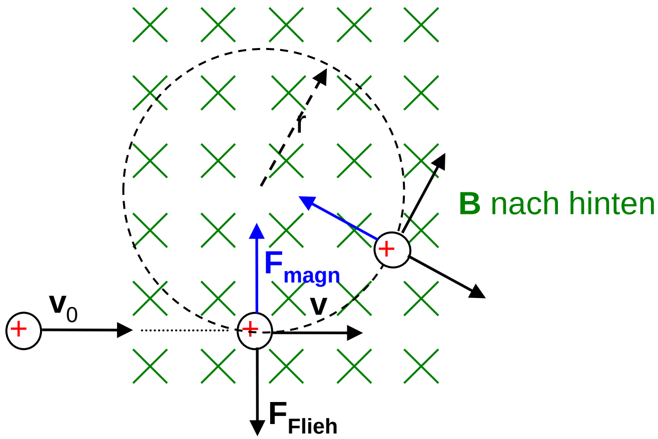
Zusatzaufgabe 5.1.7

Warum sind Ruhe- und Bewegungsinduktion beide erforderlich? Erläutern Sie in Auswertung von der drei vorangegangenen Aufgaben!

Aufgabe 5.1.8

Im zeitveränderlichen magnetischen Störfluss $B = 0{,}002\ \mathrm{Vs/m^2}\ \sin(2\pi\ 50\ \mathrm{Hz}\ t)$ befinden sich über $l=10$ m eine parallele Zweidrahtleitung (Abstand $d=1$ mm), eine verdrillte Zweidrahtleitung (Abstand d, Länge einer Verdrillung 3 cm) und ein Koaxialkabel (Durchmesser $2d$). B ca. Energieleitung mit 10 A.
Frage: Welche Störspannungen werden bei ungünstigster Orientierung induziert?
Hinweis: Von verdrillter Zweidrahtleitung im ungünstigsten Fall ungerade Zahl Verdrillungen im Feldbereich. Koaxialkabel → viele Leiterschleifen als Kreissegmente dα, deren Spannungen „parallel“ geschaltet sind. Dicken der Leiter vernachlässigen.

Aufgabe 5.3.1
Berechnung der Bahn einer bewegten Punktladung (Proton) im Magnetfeld der Erde (Strahlungsgürtel).

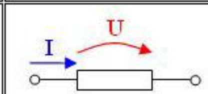
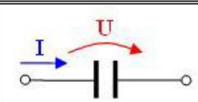
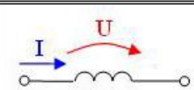
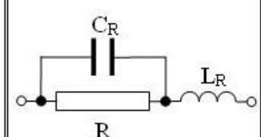
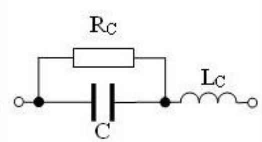
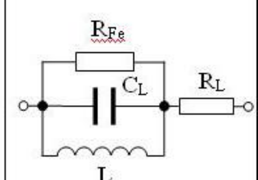


m_{Proton} = 1,57 10^{-24} g
Q_{Proton} = +1,6 10^{-19} As
v_0 = 200 000 km/s (ca. 100 MeV)
B_{Erde} = 48 10^{-6} Vs/m^2

Frage: Wie groß ist der Radius der Kreisbahn?
Hinweis: Der Radius folgt aus dem Kräftegleichgewicht einer Kreisbahn: Lorentzkraft (= Beschleunigungskraft zum Zentrum) = Fliehkraft.

Bezeichnung	Vorgänge im elektrischen Leiter (Strömungsfeld)	Vorgänge im elektrischen Nichtleiter (elektrostatisches Feld)	Vorgänge im Magnetfeld
Ladung Naturgröße	$Q = \int_{Dauer} I \cdot dt$	Q $\rho = dQ/dV$ $Q = N \cdot q_0 = \int_V \rho \, dV$ $q_0 = 1{,}6 \; 10^{-19} As$ $[Q] = C = As$	
Fluss- bzw. Stromgröße	I $I = dQ/dt$ $I = \int_{Fläche} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ $[I] = A$	Ψ $\Psi_{ges} = Q$ $\Psi = \int_{Fläche} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ $[\Psi] = As$	Φ $\Phi_{kop} = w \, \Phi$ $\Phi = \int_{Fläche} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ $[\Phi] = Wb = Vs$
Knotenpunktsatz	$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{innerhalb}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Flussdichte bzw. Stromdichte	$\mathbf{S}$ $\lvert\mathbf{S}\rvert = dI/dA$ $\mathbf{S} = \mathbf{v}_d \, \rho$ $[S] = A/m^2$	$\mathbf{D}$ $\lvert\mathbf{D}\rvert = d\Psi/dA$ $[D] = As/m^2$	$\mathbf{B}$ $\lvert\mathbf{B}\rvert = d\Phi/dA$ $[B] = T = Vs/m^2$
Feldstärke	$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p$ $\lvert\mathbf{E}\rvert = dU/dl$ $[E] = V/m$	$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p$ $\lvert\mathbf{E}\rvert = dU/dl$ $[E] = V/m$	$\mathbf{H}$ $\lvert\mathbf{H}\rvert = dV_m/dl$ $[H] = A/m$
Spannungsgr. Urspannung	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{Weg} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ $[U] = V$	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{Weg} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ $[U] = V$	V_m $\Theta = I \, w = \Sigma \, I_{umf}$ $V_m = \int_{Weg} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ $[V_m] = A$
Maschensatz	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_0$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_0$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Theta$ Durchflutungsgesetz
Beziehung Flussdichte und Feldstärke	$\mathbf{S} = \kappa \, \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon \, \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \, \mathbf{H}$
Materialkonstante	κ = spez. Leitw., ρ = spez. Wid.	$\varepsilon = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r$ $\varepsilon_0 = 8{,}86 \; 10^{-12} As/Vm$	$\mu = \mu_0 \, \mu_r$ $\mu_0 = 1{,}256 \; 10^{-6} Vs/Am$

Beziehung Flussgr. und Spannungsgr.	$U = R\,I$ $I = G\,U$	$U = (1/C)\,Q$ $Q = C\,U$	$V_m = R_m\,\Phi$ $\Phi = (1/R_m)\,V_m$
Definition:	$R = U/I$ $[R] = \Omega = V/A$	$C = Q/U$ $[C] = F = As/V$	$R_m = V_m/\Phi$ $[R_m] = A/Vs$
Bemessung: homogene Verhältnisse	$R = \frac{1}{\kappa A} = \frac{\rho l}{A}$	$C = \frac{\varepsilon A}{d}$	$R_m = \frac{1}{\mu A}$
Bez. Flussgr. u. el. Größe	$(I = G\,U)$	$Q = C\,U$	$w\Phi = L\,I$
Induktion Def. Induktivität: Bemessung Induktivität:			$u_{ind} = w\,d\Phi/dt - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\cdot\mathbf{l}$ $L = w\Phi/I$ $L = w^2/R_m$ $[L] = H = Vs/A$
Energie	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u\,i\,dt$ Verlustenergie $W_{12} = U\,I\,t_{12}$ für u,i=const $[W] = Ws = VAs$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u\,i\,dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ gespeichert bei Q, U $[W] = Ws = VAs$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u\,i\,dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{\Phi_{kop} I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi_{kop}^2}{2L}$ gespeichert bei Φ_{kop}, I $[W] = Ws = VAs$
Leistung	$p(t) = dW/dt = u\,i$ $P = UI = U^2/R = I^2R$ für u,i=const $[P] = W = VA$	$p(t) = u\,i$	$p(t) = u\,i$
Kräfte auf Ladungen bzw. Strom bzw. zwischen Q bzw. I auf Grenz-flächen	nicht direkt	$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{E}$ $\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}$ Coulomb'sches Gesetz $\mathbf{F} = \frac{Q^2}{2A}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ $= \frac{D^2}{2\varepsilon_0} A = \frac{DE}{2} A = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} A$	$\mathbf{F} = Q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{F} = I\,(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{F} = \frac{\mu}{2\pi r} I_1 I_2$ $\mathbf{F} = \frac{\Phi^2}{2A}\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right)$ $= \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{BH}{2} A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A$

Knotenpunktsatz	$\sum_{\uparrow} I_\nu = \sum_{\downarrow} I_\mu$	$\sum_{+} Q_\nu = \sum_{-} Q_\mu$	$\sum_{\uparrow} \Phi_\nu = \sum_{\downarrow} \Phi_\mu$
Maschensatz	$\sum U_\nu = \sum E_{0\mu}$	$\sum U_\nu = \sum E_{0\mu}$	$\sum V_{m\nu} = \sum \Theta_\mu$
Teilung Fluss	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ Bedingung: U=const	$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$ Bedingung: U=const	$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}}$ Bedingung: V_m=const
Teilung Spannung	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$ Bedingung: I=const	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ Bedingung: Q=const	$\frac{V_{m1}}{V_{m2}} = \frac{R_{m1}}{R_{m2}}$ Bedingung: Φ=const
Reihenschaltung	$R_{ges} = \sum_\nu R_\nu$	$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_\nu \frac{1}{C_\nu}$	$R_{m\,ges} = \sum_\nu R_{m\nu}$ $L_{ges} = \sum_\nu L_\nu$
Parallelschaltung	$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_\nu \frac{1}{R_\nu}$	$C_{ges} = \sum_\nu C_\nu$	$\frac{1}{R_{m\,ges}} = \sum_\nu \frac{1}{R_{m\nu}}$ $\frac{1}{L_{ges}} = \sum_\nu \frac{1}{L_\nu}$
Symbol			
Beziehung an den Klemmen des idealen Bauelementes	$u = i\,R$ $i = u / R$	$u = \frac{1}{C}\int i\,dt$ $i = C\frac{du}{dt}$	$u = L\frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L}\int u\,dt$
technisches Bauelement einfache Ersatzschaltung	 C_R Kappenkapazität L_R Wicklungsindukt.	 R_C Verlustwid. des Diel. L_C Wickelinduktivität	 R_L Drahtwiderstand R_{Fe} Verlustwid. Eisen C_L Windungskapazität