

## 7.2 Netzwerke – verzweigte und vermaschte Schaltungen

**Verzweigte und vermaschte Schaltungen** besitzen **mehrere Knotenpunkte** (Verzweigungen) und **mehrere Maschen** (geschlossene Stromkreise).

Zur **Auswahl** der günstigsten Methode:

1. Besitzt das Netzwerk eine oder mehrere Quellen?
2. Berechnung von I, U an einem, mehreren, allen Elementen der Schaltung?

Folgende **Gesetze und Gleichungen** aus den Kapiteln 3 bis 5 :

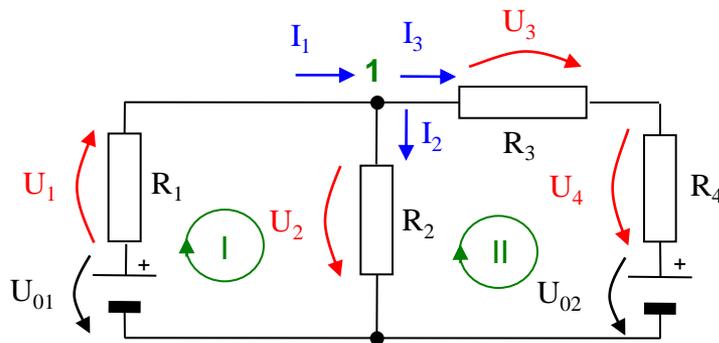
1. Gesetze, die **ohne Einschränkungen** gelten, sind
  - die Kirchhoff'schen Sätze - Maschensatz und Knotenpunktsatz sowie
  - die Strom-Spannungs-Beziehung an den Bauelementen R, C und L (gegebenenfalls einschließlich ihrer Nichtlinearitäten).
2. Gesetze **für lineare Bauelemente**
  - die Stromteilerregel,
  - die Spannungsteilerregel und
  - die Gleichungen zur Reihen- und Parallelschaltung von Elementen.
3. Weitere **Denkweisen für zusätzliche Möglichkeiten**, z.B.
  - das Überlagerungsprinzip (Abschnitt 7.3),
  - die Zusammenfassung zu Ersatzschaltungen (Abschnitt 7.4),
  - die Einführung von Maschenströmen bzw. Knotenspannungen (Abschnitt 7.6)
  - die Rechnersimulation (Abschnitt 7.5).

## Im Netzwerk bedeuten

- Zweige: Schaltungsteil von einem Knoten zu dem nächsten
- Maschen: Ein einfacher geschlossener Umlauf über verschiedene Zweige

## Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen

Geg.: Schaltung, Bauelemente mit Parametern



Starthilfe für einen PKW (vereinfacht)

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I} & I_1 & = I_2 + I_3 \\
 \text{I} & 0 & = U_1 + U_2 - U_{01} \\
 \text{II} & 0 & = U_3 + U_4 + U_{02} - U_2
 \end{array}$$

### 1. Schritt der Berechnung:

Alle I und U wählen und bezeichnen.

**Achtung:** Nur entweder I oder U wählen; der andere ist durch die Zählpfeilregeln festgelegt!

**Vorschlag:** In Jedem Zweig den Strom wählen!

### 2. Schritt der Berechnung:

Unabhängige Knoten bestimmen.

Anzahl der wirklichen Knoten **minus** Eins

### 3. Schritt der Berechnung:

Unabhängigen Maschen bestimmen.

Anzahl Zweige **minus** Anzahl unabhängige Knoten

### 4. Schritt der Berechnung:

Gleichungen aufstellen.

Einsetzen der Strom-Spannungs-Beziehung, Ordnen nach unbekanntem Strömen  
 → **lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten**

$$\begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{II}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 \\
 U_{01} \\
 U_{02}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 I_1 - I_2 - I_3 \\
 R_1 I_1 + R_2 I_2 \\
 R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3
 \end{array}
 \quad U_x = R_x I_x$$

### 5. Schritt der Berechnung:

Lösen des Gleichungssystems

Beispiel: **Kramer'sche Regel** (weil eindeutiger Algorithmus),

Matrizendarstellung

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U_{01} \\ U_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \frac{D_n}{D}$$

$$I_2 = \frac{-U_{01}(R_3 + R_4) - U_{02} R_1}{-R_2(R_3 + R_4) - R_1 R_2 - R_1(R_3 + R_4)} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02} R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}$$

### Koeffizientendeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ R_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} -R_2(R_3 + R_4) \\ +0 - R_1 R_2 \\ -R_1(R_3 + R_4) \\ -R_1 R_2 \end{array}$$

### Determinante $D_n$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U_{01} & 0 \\ 0 & U_{02} & -(R_3 + R_4) \end{vmatrix} \begin{array}{l} -U_{01}(R_3 + R_4) \\ +0 - U_{02} R_1 \\ -0 - 0 - 0 \end{array}$$

- Wurde **Richtung von  $I_2$  falsch** gewählt → negativer Zahlenwert → richtig → auf keinen Fall während der Rechnung die Wahl **ändern!**
- **Spannungen** anschließend durch Strom-Spannungs-Beziehung bestimmen.
- Bei mehr als drei Unbekannten ist Aufwand deutlich höher.
- Mit **nichtlinearen Koeffizienten** nur eine Lösung durch **Rechnersimulation**.
- Bei **zeitabhängigen Größen** → Differentialgleichungssystem

---

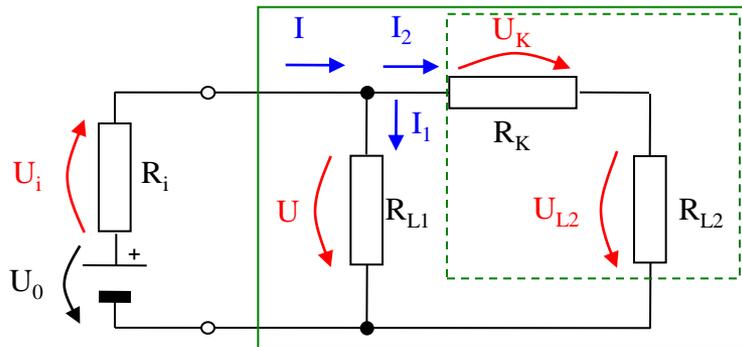
Bei **nur einer Quelle** und einem gesuchten **I** (oder **U**) →

## **Berechnung mit den**

- **Teilerregeln,**
- **den Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung** sowie
- **den Strom-Spannungs-Beziehungen.**

Geg.: Schaltung, Bauelemente mit Parametern

vereinfacht einen Audioverstärker ( $U_0$  und  $R_i$ ) ein Lautsprecher ( $R_{L1}$ ) direkt ein ( $R_{L2}$ ) über ein längeres Kabel ( $R_K$ )



$$\frac{U_{L2}}{U} = \frac{R_{L2}}{R_{L2} + R_K}$$

### 1. Schritt der Berechnung:

Alle I und U bezeichnen.

Am sinnvollsten **physikalisch richtig!**

### 2. Schritt der Berechnung:

Reine Reihenschaltung ermitteln.

Spannungsteilerregel anwenden.

### 3. Schritt der Berechnung:

Aufteilung zwischen  $R_K$  und  $R_{L2}$  geklärt

→ Zusammenfassen der Parallelschaltung

Wieder reine Reihenschaltung.

Spannungsteilerregel anwenden.

**Achtung:** Nur Elemente der reinen Reihenschaltung teilen **sich** anliegende Spannung auf.

$$\frac{1}{R_{L1KL2}} = \frac{1}{R_{L1}} + \frac{1}{R_K + R_{L2}} \quad R_{L1KL2} = \frac{R_{L1}(R_K + R_{L2})}{R_{L1} + R_K + R_{L2}}$$

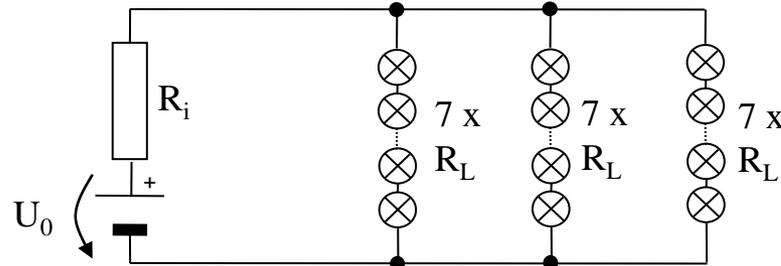
$$\frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1KL2}}{R_i + R_{L1KL2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{U_{L2}}{U_0} = \frac{U_{L2}}{U} \frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1} R_{L2}}{R_i R_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}$$

- **Erkennbar**: Kabelwiderstand möglichst klein gegenüber dem Lautsprecherwiderstand (damit Lautsprecher zwei gleich „laut“).
- Berechnung kann **auch mit der Stromteilerregel** erfolgen.
- **Mehr elektrotechnisches Verständnis**, dagegen weniger mathematische Kenntnisse und Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme.
- **Ersatzweise** kann auch **vielfach hintereinander die Strom-Spannungs-Beziehung** auf Widerstände und zusammengefasste Widerstände verwendet werden, um abwechselnd Strom oder Spannung zu bestimmen.
- Auf diese Weise können
  - die Gesamtwiderstände,
  - gesuchte Ströme und/oder
  - Spannungender meisten Schaltungen berechnet werden.

## Aufgabe

Eine Außenlichterkette besteht aus drei parallel geschalteten Reihen von je sieben Lampen und ist an eine Quelle angeschlossen.



$$\begin{aligned}
 U_{L\text{Nenn}} &= 6 \text{ V} \\
 I_{L\text{Nenn}} &= 0,1 \text{ A} \\
 U_0 &= 45 \text{ V} \\
 R_i &= 10 \text{ } \Omega
 \end{aligned}$$

Frage 1: Wie groß ist  $R_L$ ; welcher Strom fließt durch jede Lampe im Normalfall?

Frage 2: Wie ändert sich der Strom, wenn in einer Reihe zwei Lampen ausfallen (bei guten Ketten erlangen die Lampen dabei einen Kurzschluss, die restlichen Lampen leuchten weiter und zeigen so die ausgefallenen an.)

(Hinweis: Benutzen Sie die Stromteilerregel.)

## Aufgabe zu

Schaltungen, in denen Brückenzweige enthalten sind

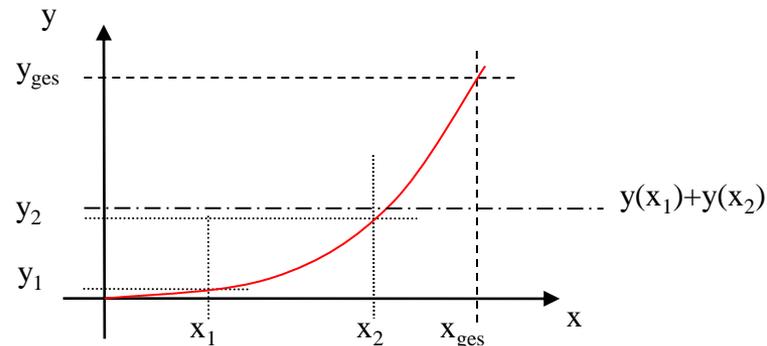
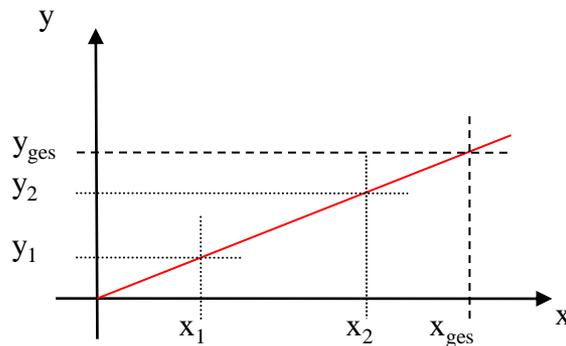
## Aufgabe zu

Vernachlässigen von Widerstände mit geringerem Einfluss als ca. 1%

## 7.3 Überlagerungsprinzip

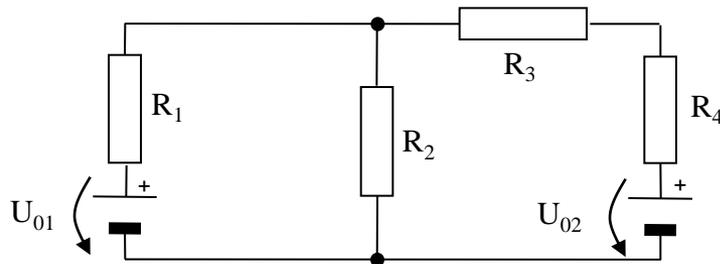
Dem Überlagerungssatz liegt die **Denkweise** zugrunde, die **Wirkungen** jeder Quelle **einzeln zu berechnen und anschließend zu addieren**.

Möglich, solange Bauelemente mit **linearen Strom-Spannungs-Beziehungen** vorliegen.



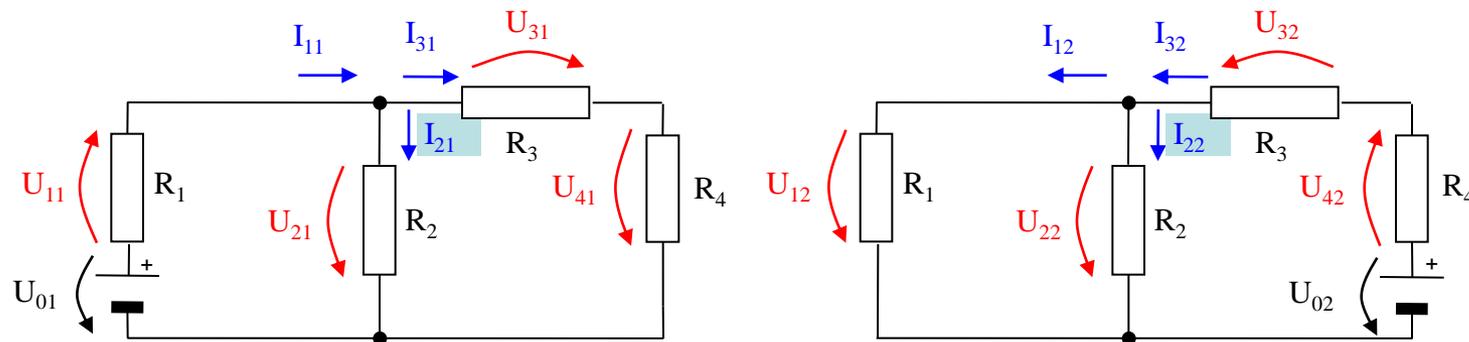
Für einen linearen Zusammenhang gilt:  $y_{ges} = y(x_{ges}) = y(x_1+x_2) \equiv y(x_1) + y(x_2)$   
 bei nichtlinearen Zusammenhang wird:  $y(x_1+x_2) \neq y(x_1) + y(x_2)$  .

## Gleiche Schaltung



**1. Schritt der Berechnung:** Schaltung in Schaltungen für jede Quelle aufteilen. Dazu die jeweils anderen idealen *Spannungsquellen durch Kurzschluss* bzw. die jeweils anderen idealen *Stromquellen durch Leerlauf* ersetzen.

**2. Schritt der Berechnung:** Alle I und U bezeichnen. (Am sinnvollsten physikalisch richtig!)



**3. Schritt der Berechnung:** Für beide Schaltungen gesuchte Größe berechnen.

- Mit Teilerregeln,
- Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie
- Strom-Spannungs-Beziehungen

$$\frac{I_{21}}{I_{11}} = \frac{\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}{R_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} \quad I_{11} = \frac{U_{01}}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}$$



$$\frac{I_{22}}{I_{32}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad I_{32} = \frac{U_{02}}{R_3 + R_4 + \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}}$$

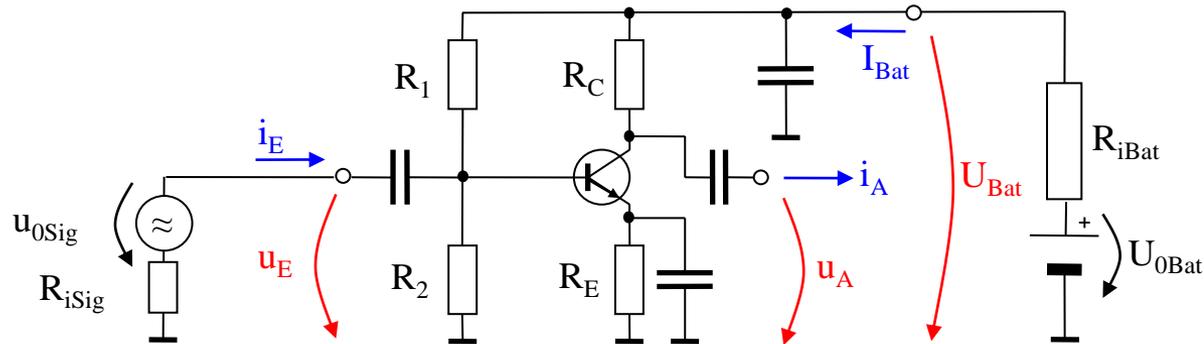
**4. Schritt der Berechnung:** Die berechneten Anteile jeder Quelle entsprechend ihrer Richtungen addieren.

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + \frac{U_{02} R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

- **Mehr elektrotechnisches Verständnis**, dagegen etwas weniger Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme.
- Denkweise → Zuordnung der Wirkungen zu den Ursachen – den Quellen

## Aufgabe

Gegeben ist die Schaltung einer Transistorverstärkerstufe. Die Kondensatoren haben für die vorliegende Signalfrequenz einen Widerstand von  $\approx 0$  und für Gleichstrom von  $\infty$



Frage: Wie sehen jeweils die Schaltungen für die Gleichstromversorgung (Quelle  $U_{0Bat}$ ) und die Signalverstärkung (Quelle  $U_{0Sig}$ ) aus?

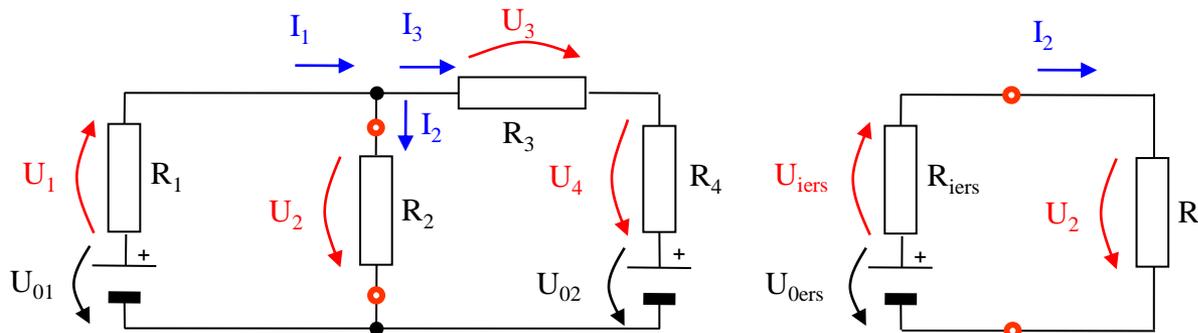
(Hinweise: Kondensatoren mit einem Widerstand von  $\approx 0$  durch „Kurzschluss“ ersetzen. Kondensatoren mit einem Widerstand von  $\infty$  führen zum Wegfall des Zweiges, in dem kein Strom fließen kann.)

## 7.4 Ersatzzweipole

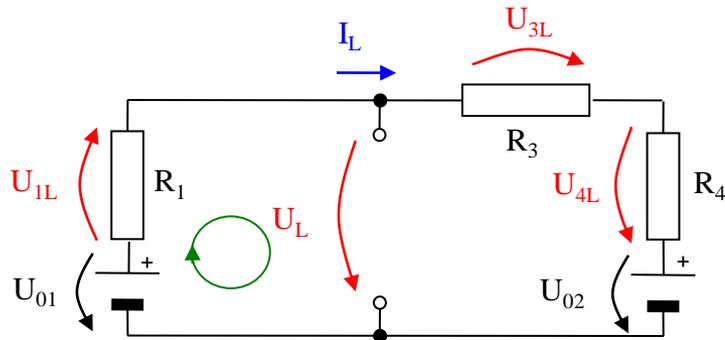
Ersatzschaltungen liegen der **Denkweise** zugrunde, **Schaltungsteile zusammenzufassen**, deren Details gerade nicht interessieren.

Zusammenfassung einer Schaltung zwischen zwei Klemmen → aktiver Zweipol (bei linearen Bauelementen einfachster aktive Zweipol)

**1. Schritt der Berechnung:** Zusammenzufassen der Schaltung kennzeichnen. Für Ersatzzweipol die Parameter  $R_{\text{iers}}$  und  $U_{0\text{ers}}$  bezeichnen (alternativ  $I_{\text{cers}}$ ).



**2. Schritt der Berechnung:** Bestimmung der Ersatzspannungsquelle  $U_{0\text{ers}}$  aus der Leerlaufspannung an den Klemmen (d.h.,  $R_2$  wird  $\infty$  gesetzt).



Nur **ein Strom** im Kreis,  $I_L$  durch  $U_{01}$  angetrieben durch  $U_{02}$  gebremst.

$$I_L = \frac{U_{01} - U_{02}}{R_1 + R_3 + R_4}$$

Aus **Maschensatz** folgt  $U_L$ .

$$0 = U_{1L} + U_L - U_{01} \quad U_L = U_{01} - I_L R_1$$

$$U_L = U_{0ers} = U_{01} - \frac{(U_{01} - U_{02})R_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1 + R_3 + R_4}$$

**3. Schritt der Berechnung:** Bestimmung des Ersatzinnenwiderstandes  $R_{iers}$   
 Berechnung des Gesamtwiderstandes (von Klemmen aus gesehen).

Dabei ideale Spannungsquellen  $\rightarrow$  Kurzschluss, ideale Stromquellen  $\rightarrow$  Leerlauf

$$R_{iers} = R_1 \parallel (R_3 + R_4) = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}$$

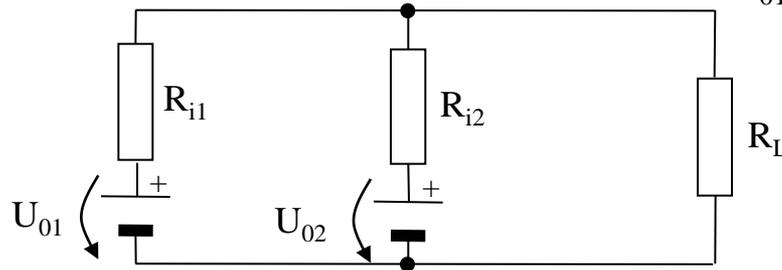
**4. Schritt der Berechnung:** Bestimmung von  $I_2$  im Grundstromkreis.

$$I_2 = \frac{U_{0ers}}{R_{iers} + R_2} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Nützlich, wenn Ersatzzweipol **wieder verwendbar**

## Aufgabe

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $R_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich.



$$\begin{aligned} U_{01} &= 9 \text{ V} \\ U_{02} &= 8,1 \text{ V} \\ R_{i1} &= 6 \text{ } \Omega \\ R_{i2} &= 9 \text{ } \Omega \\ R_L &= 18 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

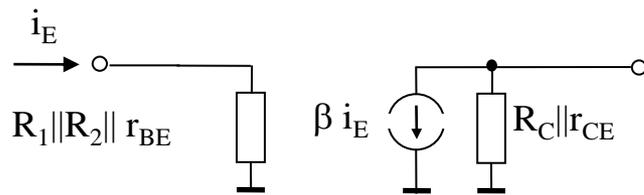
Frage 1: Wie groß ist der Strom durch  $R_L$ ?

Frage 2: Welcher Strom fließt, wenn beide Batterien 9 V und  $R_i = 6 \text{ } \Omega$  hätten?

(Hinweis: Berechnen Sie mit Hilfe eines Ersatzzweipols für beide Batterien.)

## Aufgabe

Die Bestimmung von Ersatzzweipolen für Ein- und Ausgang des Transistorverstärker



$$\begin{aligned} I_c &= \beta I_E \quad (\beta \text{ Stromverstärkungsfaktor,} \\ I_E &\text{ Eingangsstrom} \\ R_{iEin} &= R_1 \parallel R_2 \parallel r_{BE} = 10 \text{ k}\Omega, \\ \beta &= 200 \text{ und } R_{iAus} = R_C \parallel r_{CE} = 5 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$



Frage 1: Wie groß sind die Eingangsspannung  $u_E$ , die Leerlaufausgangsspannung  $u_A$  und die Verstärkung  $v_0 = u_E/u_A$  bei  $i_E = 10 \text{ } \mu\text{A}$ ?

Frage 2: Wie groß ist die Leerlaufausgangsspannung, wenn ein Widerstand von  $10 \text{ k}\Omega$  den Ausgang belastet (z. B. eine zweite Verstärkerstufe)?

## 7.5 Modellierung und Simulation

Möglichkeiten numerischer Lösung (einschließlich Differentialgleichungen und nichtlineare Bauelemente) → Simulationsprogramme.

**Modell** für ein Simulationsprogramm → **formale Sprache**

- elektrische **Schaltzeichnungen**,
  - Block- oder **Funktionsdiagramme**,
  - **Petrinetze**
  - **Hardwarebeschreibungssprachen.**
- (jeweils mit genau festgelegten Zeichnungselementen)

1. Modell muss physikalisch widerspruchsfrei sein.
2. Anlage so stark wie möglich vereinfachen, auf wesentlichen Funktionen beschränken (*Parametervariation*)
3. An Stellen für genauere Untersuchung schrittweise Modell verfeinern. (Jede Veränderung der Wirkung zuordnen.)
4. Entscheidend ist Simulationsstrategie. („Experiment“: was nicht erprobt, bleibt unbekannt.)
5. Strategie planen → vollständiger Überblick (z.B. grafische Darstellung).  
Mathematische Zusammenhänge lediglich als Annäherung zu Messkurven.

**Physikalisch widerspruchsfrei** bedeutet:

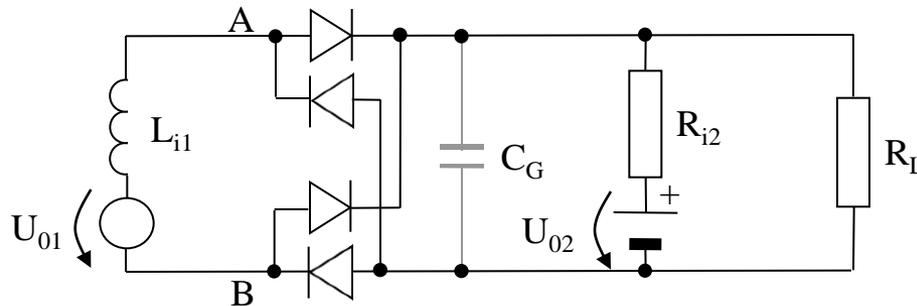
- Ideale **Spannungsquelle**, **Kapazität**, **Schalter** nicht (in irgendeiner Kombination) **parallel** schalten.
- Ideale **Stromquelle**, **Induktivität**, **Schalter** nicht (in irgendeiner Kombination) in **Reihe** schalten.
- Zeitkonstante  $\tau = 0$  in rückgekoppelten Kreisen führt zu Stabilitätsproblemen.
- Funktion der Schaltung **nicht durch** „zufällig nicht vernachlässigte“ parasitäre oder **Verlustelemente** (z.B. Innenwiderstand der Quelle).

**Deutlich:** Simulation mit einem Rechner → sehr gutes **elektrotechnisches Verständnis** und einige **Erfahrungen** voraussetzt.

Die Ergebnisse auf **Plausibilität überprüfen** und **interpretieren**.

## Aufgabe

Ein Akku und ein Generator wurden parallel geschaltet, um eine Last ohne Unterbrechung zu versorgen. Durch die ungleiche Konstruktion sind  $U_{01}$ ,  $U_{02}$  sowie  $\omega_1 L_{i1}$ ,  $R_{i2}$  nicht gleich



$U_{01\text{eff}}$	$= 12 \text{ V}$
$U_{02}$	$= 12 \text{ V}$
$L_{i1}$	$= 64 \text{ } \mu\text{H}$
$C_G$	$= 2000 \text{ } \mu\text{F}$
$R_{i2}$	$= 0,1 \text{ } \Omega$
$R_L$	$= 6 \text{ } \Omega$
$\omega_1$	$= 50 \text{ Hz}$

Frage 1: Wie sehen Strom und Spannung von  $R_L$  und bei den Punkten A B über der Zeit aus?

Frage 2: Welche Veränderung gibt es, wenn ein Glättungskondensator  $C_G$  eingefügt wird?

(Hinweis: Ideale Dioden einsetzen. Im Falle der Simulation geht der Rechner davon aus, dass im Startmoment die Quellen eingeschaltet werden.)

## 7.6 Ausblick zu weiteren Analysemethoden

- Mathematische Verfahren zur Lösung (Mathematik)
- Reduzierung der Differentialbeziehungen (AEP III)
- Knotenspannungsanalyse (Grundlage für Simulationsprogramme)
- Maschenstromanalyse

