

Aufgabe 3.1.2

Frage 1: Die Stromdichte ergibt sich aus $S = \frac{dI}{dA_{\perp}}$ und für $\frac{dI}{dA_{\perp}} = \text{const}$ aus $\frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}}$, ΔI ist bereits bekannt mit 100A. Es fehlt noch die halbzyklindrische Fläche des versunkenen Leiters, diese erhalten wir durch $\Delta A_{\perp} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}{2}$.

Rechnung: $I = 100\text{A}$ $r = 1\text{cm}$ $h = 1\text{m}$ $\kappa_{\text{Erde}} \approx 10^{-2} \text{A/Vm}$

Die Fläche wird bei 1m Länge und 1cm Radius berechnet:

$$\Delta A_{\perp}(r = 1\text{cm}) = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1\text{cm} \cdot 1\text{m}}{2} = \underline{\underline{314,15\text{cm}^2}}$$

Aus dem Strom und der Oberfläche kann nun die Stromdichte S errechnet werden:

$$S(r = 1\text{cm}) = \frac{\Delta I}{\Delta A_{\perp}} = \frac{100\text{A}}{314,15\text{cm}^2} = \underline{\underline{0,3183\text{A/cm}^2}} = 3183 \text{ A/m}^2$$

$$S(r) = S(1\text{cm}) \cdot 1\text{cm} / r \quad \text{z.B. } S(1\text{m}) = S(1\text{cm}) / 100 = 31,8 \text{ A/m}^2$$

Die errechnete Stromdichte und die Leitfähigkeit der Erde, ermöglichen es die Feldstärke, durch $E = \frac{S}{\kappa_{\text{Erde}}}$ zu errechnen. (Durch gleich bleibende Bodenverhältnisse ist die Leitfähigkeit der Erde homogen, somit bleibt κ konstant):

$$E(r = 1\text{m}) = \frac{S(1\text{m})}{\kappa_{\text{Erde}}} = \frac{31,83\text{A/m}^2}{10^{-2} \text{A/Vm}} = \underline{\underline{3183\text{V/m}}} \quad E(r) = \frac{E(r = 1\text{m}) \cdot 1\text{m}}{r}$$

Frage 2: Die Schrittspannung kommt zustande durch die unterschiedlichen Potentiale, zwischen den beiden Füßen. Die Schrittspannung ist in diesem Fall gegeben

$$\text{durch: } U_s = \int_{r_1}^{r_1+0,5\text{m}} E(r) dr = E(r = 1\text{m}) \cdot 1\text{m} \int_{r_1}^{r_1+0,5\text{m}} \frac{dr}{r} = 3183\text{V} \cdot \ln\left(\frac{r_1 + 0,5\text{m}}{r_1}\right).$$

Rechnung: $I = 100\text{A}$ $\kappa \approx 10^{-2} \text{A/Vm}$ $r_1 = \text{variable Entfernung vom Leiter}$
 $h = \text{Länge} = 1\text{m}$ $0,5\text{m} = \text{Schritt Abstand}$

Beispielrechnung:

$$U_s = 3,18 \cdot 10^3 \text{V} \cdot \ln\left(\frac{r_1 + 0,5\text{m}}{r_1}\right) \rightarrow U_s(1\text{m}) = 3,18 \cdot 10^3 \text{V} \cdot \ln\left(\frac{1\text{m} + 0,5\text{m}}{1\text{m}}\right) \rightarrow$$

$$U_s(1\text{m}) = 3,18 \cdot 10^3 \text{V} \cdot \ln(1,5) \rightarrow U_s = \underline{\underline{1290,6355\text{V}}}$$

Die Beispielrechnung dient der Verdeutlichung der Rechnung, die folgende Tabelle zeigt die Werte in Abhängigkeit.

Abstand in m	1	5	10	15	20	25	30
Schrittspannung in V	1290,635	303,381	155,303	104,373	78,599	63,033	52,561

