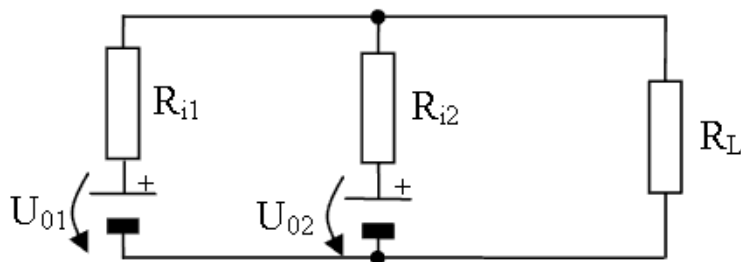


Übungsaufgabe 7.2.1

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind U_{01} , U_{02} sowie R_{i1} , R_{i2} nicht gleich.

$$\begin{aligned} U_{01} &= 9 \text{ V} \\ U_{02} &= 8,1 \text{ V} \\ R_{i1} &= 6 \text{ } \Omega \\ R_{i2} &= 9 \text{ } \Omega \\ R_L &= 18 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

Darstellung:

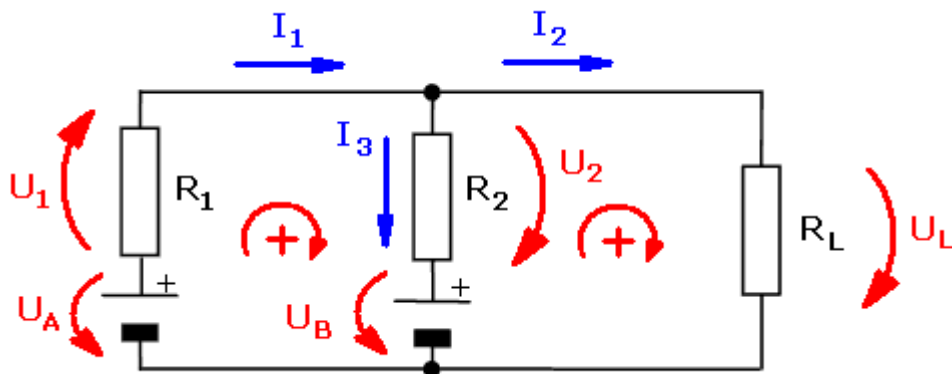


Damit die Indizes nicht zu sehr verwirren, gilt folgende Vereinbarung:

$$\begin{aligned} R_{i1} &\text{ ist jetzt } R_1 \\ R_{i2} &\text{ ist jetzt } R_2 \\ U_{01} &\text{ ist jetzt } U_A \\ U_{02} &\text{ ist jetzt } U_B \end{aligned}$$

Frage 1: Wie groß ist der Strom durch R_L ; welchen Anteil liefern beide Quellen?

Als erstes wird die Richtung der Spannungen und Ströme festgelegt (gewählt).



Wir haben drei Maschen und zwei Knoten davon einen unabhängigen Knoten und zwei unabhängige Maschen.

Fangen wir mit den Knoten an. Es gilt die Regel: **Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme.**

Wenn man sich den oberen Knoten ansieht, dann ist I_1 ein zufließender Strom und I_2 und I_3 sind abfließende Ströme. Also kann man folgende erste Gleichung aufstellen:

$$\text{I. } I_1 = I_2 + I_3$$

Für den unteren Knoten gilt dasselbe, nur mit umgekehrtem Vorzeichen: I_1 ist ein abfließender Strom und I_2 und I_3 sind zufließende Ströme. Also kann man keine neue Gleichung erstellen.

Jetzt kommen die beiden Maschen. Fangen wir mit der linken Masche an:

$$\text{II. } U_1 + U_2 + U_B - U_A = 0$$

Alle Spannungen, deren Richtung im Umlaufsinn zeigt, werden positiv gezählt. Und alle Spannungen, deren Richtung gegen den Umlaufsinn zeigt, werden negativ gezählt. Der Umlaufsinn ist dargestellt durch den Pfeil im Uhrzeigersinn mit einem "+"-Zeichen darin.

Die rechte Masche:

$$\text{III. } U_L - U_B - U_2 = 0$$

Wir haben jetzt drei Gleichungen (I., II. und III.). Als nächsten Schritt wandeln wir die Spannungen, soweit möglich, in Produkte von Strom und Widerstand (nach $U = I \cdot R$):

$$\text{II. } I_1 R_1 + I_3 R_2 + U_B - U_A = 0$$

$$\text{III. } I_2 R_L - U_B - I_3 R_2 = 0$$

Wenn wir jetzt diese Gleichungen nach I_1 , I_2 und I_3 sortieren und den Rest auf die andere Seite bringen, dann sieht das so aus:

$$\text{I. } 0 = -I_1 + I_2 + I_3$$

$$\text{II. } U_A - U_B = R_1 I_1 + R_2 I_3$$

$$\text{III. } U_B = R_L I_2 - R_2 I_3$$

Wir haben jetzt drei Gleichungen, die alle von I_1 , I_2 und I_3 abhängig sind. Schreibt man dies nun als Matrizenprodukt auf, dann bekommt man:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U_A - U_B \\ U_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ R_1 & 0 & R_2 \\ 0 & R_L & -R_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

mit der Koeffizientendeterminante:

$$D = \text{Det} \begin{pmatrix} -1 & +1 & +1 \\ R_1 & 0 & R_2 \\ 0 & R_L & -R_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & +1 & +1 \\ R_1 & 0 & R_2 \\ 0 & R_L & -R_2 \end{vmatrix}$$

Gemäß der Regel von Sarrus bekommt man folgendes Ergebnis:

$$D = R_1 R_L + R_L R_2 + R_2 R_1 = 6 * 18 + 18 * 9 + 9 * 6 \Omega^2 = 324 \Omega^2$$

Um nun I_1 auszurechnen, setzen wir den den Spaltenvektor links vom Gleichheitszeichen in die **erste Spalte** der Matrix und rechnen dann diese Determinante aus:

$$D_1 = \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & +1 & +1 \\ U_A - U_B & 0 & R_2 \\ U_B & R_L & -R_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & +1 & +1 \\ U_A - U_B & 0 & R_2 \\ U_B & R_L & -R_2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = R_2 U_B + R_L (U_A - U_B) + R_2 (U_A - U_B)$$

$$D_1 = 9\Omega * 8,1V + 18\Omega(9V - 8,1V) + 9\Omega(9V - 8,1V) = 97,2 V^2/A$$

Und I_1 wird damit

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{97,2 V^2/A}{324 (V/A)^2} = 0,3 A$$

Für I_2 setzt man den Spaltenvektor links vom Gleichheitszeichen in die **zweite Spalte** der Matrix und rechnen dann diese Determinante aus:

$$I_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ R_1 & U_A - U_B & R_2 \\ 0 & U_B & -R_2 \end{vmatrix}$$

$$I_2 = R_2 (U_A - U_B) + R_1 U_B + R_2 U_B$$

$$I_2 = 9\Omega * (9V - 8,1V) + 6\Omega * 8,1V + 9\Omega * 8,1V = 129,6A$$

Und I_2 wird damit

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{129,6 V^2/A}{324 (V/A)^2} = 0,4 A$$

Für I_3 setzt man den Spaltenvektor links vom Gleichheitszeichen in die **dritte Spalte** der Matrix und rechnen dann diese Determinante aus:

$$I_3 = \begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 \\ R_1 & 0 & U_A - U_B \\ 0 & R_L & U_B \end{vmatrix}$$

$$I_3 = R_L(U_A - U_B) - R_1 U_B$$

$$I_3 = 18\Omega \cdot (9V - 8,1V) - 6\Omega \cdot 8,1V = -32,4A$$

Und I_2 wird damit

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-32,4 \text{ V}^2/\text{A}}{324 (\text{V}/\text{A})^2} = -0,1 \text{ A}$$

Zusätzlich zu: $U_A = 9 \text{ V}$, $U_B = 8,1 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 9 \Omega$ und $R_L = 18 \Omega$
haben wir jetzt berechnet: $I_1 = 0,3 \text{ A}$, $I_2 = 0,4 \text{ A}$ und $I_3 = -0,1 \text{ A}$.

Ob wir richtig gerechnet haben können wir jetzt prüfen, indem wir die Werte in die Gleichungen I., II. und III. einsetzen:

Gleichung I.: $0 = -I_1 + I_2 + I_3$

I. $0 = -0,3 \text{ A} + 0,4 \text{ A} - 0,1 \text{ A}$: **richtig**

Gleichung II.: $U_A - U_B = R_1 I_1 + R_2 I_3$

II. $9V - 8,1V = 6\Omega \cdot 0,3A + 9\Omega \cdot (-0,1A)$: **richtig**

Gleichung III.: $U_B = R_L I_2 - R_2 I_3$

III. $8,1V = 18\Omega \cdot 0,4A - 9\Omega \cdot (-0,1A)$: **richtig**

Da die Lösung der Aufgabe mit der Determinantenmethode nicht jedem gefällt, eine weitere Lösung:

Gleichung I. und II. nach I_1 auflösen und gleichsetzen:

I. $I_1 = I_2 + I_3$

II. $I_1 = \frac{1}{R_1} [(U_A - U_B) - R_2 I_3]$

I. = II. : $I_2 + I_3 = \frac{1}{R_1} [(U_A - U_B) - R_2 I_3]$

Da der Strom durch R_L , d.h. I_2 gefragt ist, lösen wir Gleichung III. nach I_3 auf :

III.: $I_3 = \frac{1}{R_2} [R_L I_2 - U_B]$

Wir setzen diese Gleichung für I_3 in (I. = II.) Gleichung ein:

$$I_2 + \frac{1}{R_2} [R_L I_2 - U_B] = \frac{1}{R_1} \left[(U_A - U_B) - R_2 \frac{1}{R_2} [R_L I_2 - U_B] \right]$$

Diese Gleichung lösen wir nach I_2 auf und berechnen sie

$$I_2 = \frac{\left[\frac{U_B}{R_2} + \frac{U_A}{R_1} \right]}{R_L \left[\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]} = \frac{\left[\frac{8,1\text{V}}{9\Omega} + \frac{9\text{V}}{6\Omega} \right]}{18\Omega \left[\frac{1}{18\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{9\Omega} \right]} = \frac{2,4 \frac{\text{V}}{\Omega}}{6} = 0,4\text{A}$$

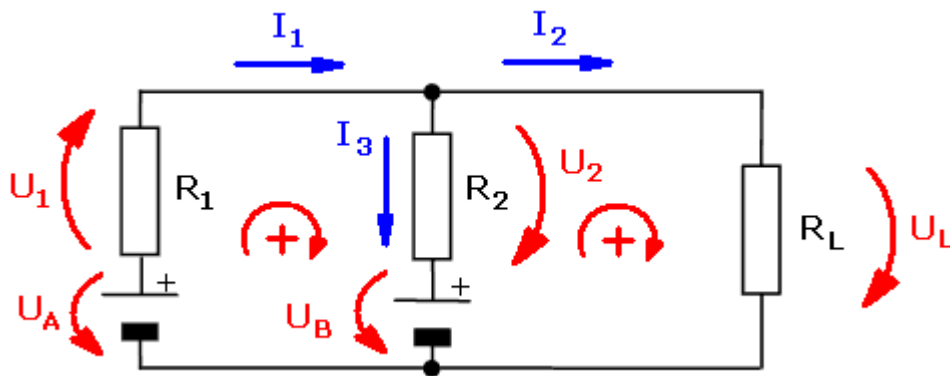
Mit Gleichung III. rechnen wir I_3 aus:

$$I_3 = \frac{1}{R_2} [R_L I_2 - U_B] = \frac{1}{9\Omega} [18\Omega * 0,4\text{A} - 8,1\text{V}] = -0,1\text{A}$$

Mit Gleichung I. rechnen wir I_1 aus:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,4\text{A} + (-0,1\text{A}) = 0,3\text{A}$$

Frage 2: Welche Ströme liefern die Batterien, wenn beide $U_A = U_B = 9\text{V}$, $R_L = 18\Omega$ und $R_1 = R_2 = 6\Omega$ hätten?



$$D = R_1 R_L + R_L R_2 + R_2 R_1 = 6 * 18 + 18 * 6 + 6 * 6 \Omega^2 = 252 \Omega^2$$

$$D_1 = 6\Omega * 9\text{V} + 18\Omega(9\text{V} - 9\text{V}) + 6\Omega(9\text{V} - 9\text{V}) = 54 \text{V}^2/\text{A}$$

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{54 \text{V}^2/\text{A}}{252 (\text{V}/\text{A})^2} = 0,213 \text{A}$$

$$I_2 = 6\Omega * (9\text{V} - 9\text{V}) + 6\Omega * 9\text{V} + 6\Omega * 9\text{V} = 108\text{A}$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{108 \text{V}^2/\text{A}}{252 (\text{V}/\text{A})^2} = 0,427 \text{A}$$

$$I_3 = 18\Omega * (9\text{V} - 9\text{V}) - 6\Omega * 9\text{V} = -54\text{A}$$

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-54 \text{V}^2/\text{A}}{253 (\text{V}/\text{A})^2} = -0,213 \text{A}$$

Beide Batterien sind gleich mit 0,213 A belastet (statt 0,3 A und 0,1 A) und die Last bekommt 0,427 A (statt nur 0,4 A).