Wirkleistung Beispielrechnung

Eine Spannung $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$ und der Strom $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)$ ergeben die Wirkleistung (Mittelwert der Leistung)

$$\bar{P} = P_W = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \sin(\omega t)\, \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)dt \,.$$

Mit $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ wird daraus

$$P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{T} \int_0^T [\sin^2(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi)]\, dt \,.$$

Durch die Substitution $\omega t = x$ und somit $dt = dx / \omega = dx /(2\pi/T)$ folgt

$$P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin^2(x) \cos(\varphi) + \sin(x) \cos(x) \sin(\varphi)]\, dx$$

$$P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{2\pi} \cos(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx + \sin(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x)\, dx \,.$$

Die Substitution $\sin x = y$ mit $\cos x\, dx = dy$ bzw. $dx = dy / \cos x$ führt für das erste Integral zu einer Rekursivformel

$$\int \sin^n(x)\, dx = \frac{n-1}{2} \int \sin^{n-2} x\, dx - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \quad \text{hier für } n = 2$$

und für das zweite Integral zu der Lösung $\frac{1}{2} \sin^2 x$ jeweils in den Grenzen von 0 bis 2π .

$$P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \cos x\right) \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 x \cos \varphi\right]_0^{2\pi}$$

Oder durch Ersetzen von $\sin x$ mit $(e^{jx} - e^{-jx})/2j$ wird das erste Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{(e^{jx} - e^{-jx})^2}{(2j)^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{j2x} - 2 + e^{-j2x}) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8j} (e^{j2x} + e^{-j2x})\right]_0^{2\pi}$$

Nach einsetzen der Grenzen ergibt sich dann

$$P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{2\pi} \left[\left(\frac{2\pi}{2} - 0\right) \cos \varphi + 0 - [0 - 0 + 0]\right]$$

und somit lautet das Ergebnis

$$\underline{\underline{P_W = \frac{\hat{U}\,\hat{I}}{2} \cos \varphi \,.}}$$