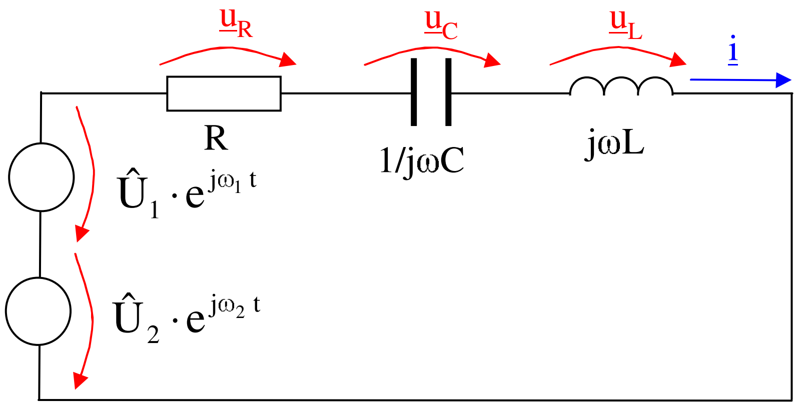
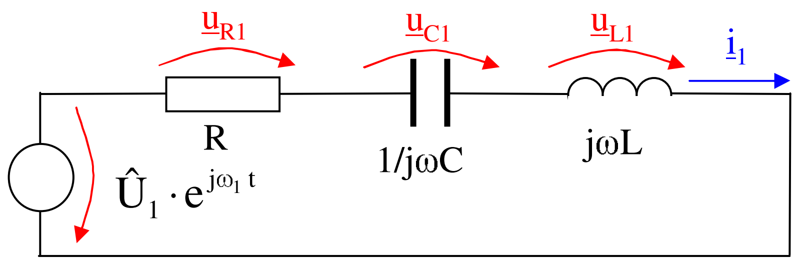
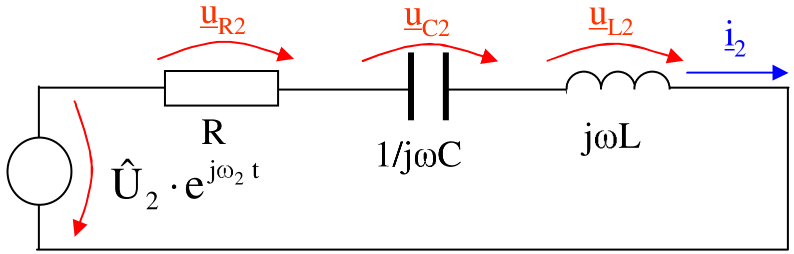
2.2 Nichtsinusförmige periodische Signale

Addition von zwei sinusförmigen Signalen unterschiedlicher Frequenz ergibt nichtsinusförmiges periodisches Signal.





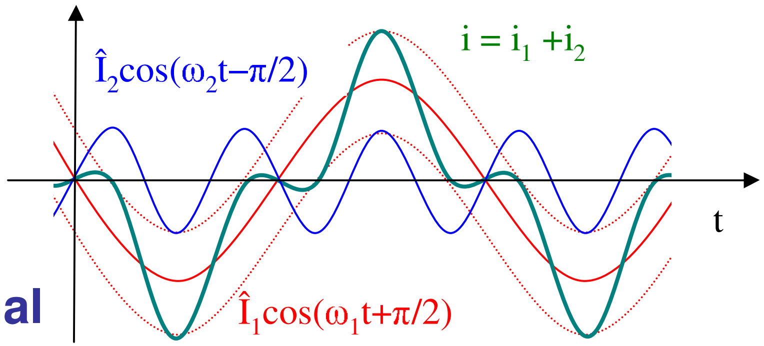


Überlagerungssatz

Das Gesamtergebnis ist die richtungsrichtige Addition

fast gleiche Frequenzen
→ typischer Schwebungsvorgang

Mehrere Frequenzen →
nichtsinusförmiges periodisches Signal



Alle periodischen Signale können durch Zerlegung in eine Fourierreihe zu einer Summe von Sinussignalen umgeformt werden.

$$u(t) = \frac{U_{a0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_{ak} \cos(k\,\omega\,t) + U_{bk} \sin(k\,\omega\,t) \right)$$

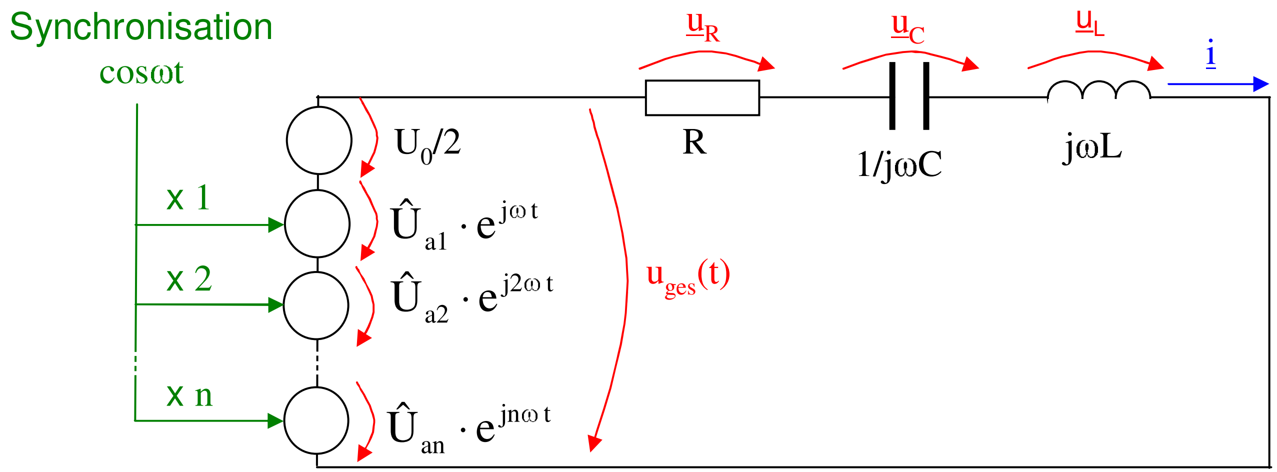
mit

$$U_{ak} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\omega\,t) \cos(k\,\omega\,t)\, d\omega\,t \qquad \text{für } K = 0,1,2,\ldots$$

$$U_{bk} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\omega\,t) \sin(k\,\omega\,t)\, d\omega\,t \qquad \text{für } K = 1,2,\ldots$$

- Allgemein entstehen unendlich viele Summanden U_{ak} und U_{bk}.
- Alle vorkommenden Frequenzen sind immer genau ganze Vielfache der Grundfrequenz (Oberschwingungen)
- Wichtige Signalformen aus Tafeln
- Praktisch immer endliche Anzahl Summanden

Umkehrung → Signale aus mehreren Sinussignalen zusammensetzen



insbesondere im Audiobereich und bei Musikinstrumenten (Register der Orgel, elektronische Register …) nach dieser Methode

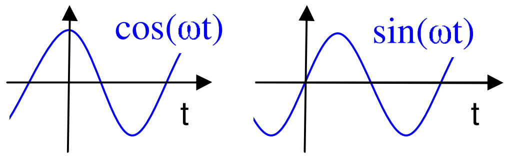
Zeitfunktion $u(t)$ **und** Darstellung des Frequenzspektrums (U_{ak} und U_{bk} oder U_{ck} und φ_k) → völlig äquivalente Informationen über den Vorgang.

$$\text{mit } U_{ck} = \sqrt{U_{ak}^{\;2} + U_{bk}^{\;2}} \quad \text{und} \quad \varphi_k = \arctan(U_{bk} / U_{ak})$$

$$(U_{ak} + jU_{bk})\big(\cos(k\,\omega\,t) + j\sin(k\,\omega\,t)\big) = \underline{U}_{ck} e^{jk\,\omega\,t}$$

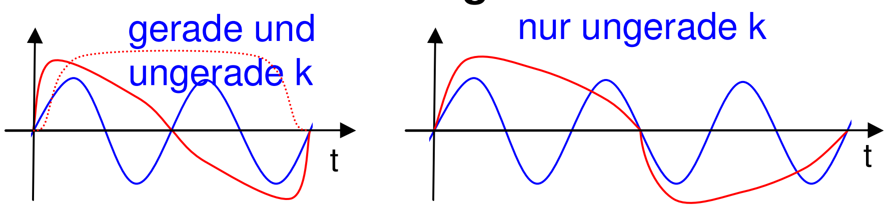
Bei der Arbeit mit Spektren lässt sich eine Reihe von Regeln erkennen und nutzen.

1.Symmetrie der Zeitfunktion gegenüber der Achse im Zeitnullpunkt



Spiegelsymmetrie $f(-t) = f(t)$ → nur cos-Funktionen (also U_{ak}) → (alle U_{bk}=0).
Unsymmetrie $f(-t) = -f(t)$ → nur sin-Funktionen (also U_{bk}) → (alle U_{ak}=0).

2. Symmetrie der Zeitfunktion bezüglich ihrer Kurvenform



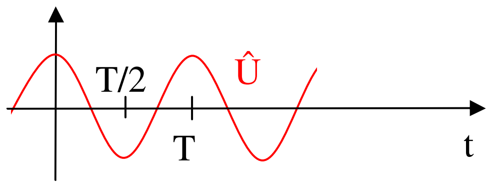
Gilt für die Kurven $f(-t) = f(t)$ oder $f(-t) = -f(t)$ **und** $f(t+T/2) = -f(t)$ (T Periodendauer), → zusätzlich zu Punkt 1. nur ungeradzahlige Oberschwingungen (k = 3, 5, 7, 9…).

3.Es können natürlich beide Fälle kombiniert sein und/oder zusätzlich ein **Gleichanteil**

Die Regeln sind sowohl zur Kontrolle der Plausibilität von Messungen unerlässlich als auch zur Aufwandsreduzierung bei Berechnungen sehr hilfreich.

sinusförmiges Signal ist das wichtigste Testsignal

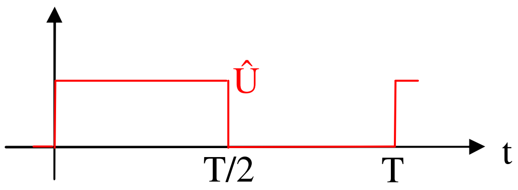
$u(t) = \hat{U} \cos \omega t$ mit Periode $\omega T = 2\pi$

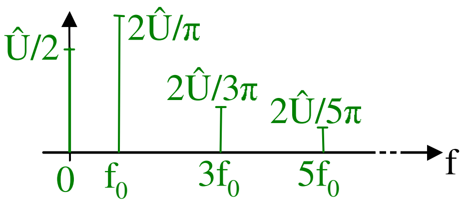


Rechtecksignal → Dauer **Anstiegs- und Abfallflanken** ($t_{an/ab}$ von $0{,}1$ bis $0{,}9 \cdot \hat{U}$)
→ sowie das **Überschwingen**

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} & \text{für } 0 \le \omega t \le \pi \\ 0 & \text{für } \pi \le \omega t \le 2\pi \end{cases} \quad \text{mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U}/2 + \frac{2\hat{U}}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \dots\right)$$

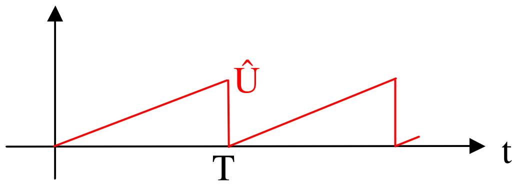


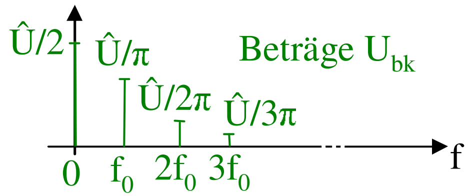


Dreiecksignal → Analyse der **Linearität** von Systemen
(symmetrisches Dreieck und „Sägezahn“)

$$u(t) = \hat{U}\ t/T \quad \text{für} \quad 0 \le t \le T \quad \text{mit Periode}\ \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U}/2 - \frac{\hat{U}}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \ldots\right)$$





Beispiel: **Analyse modulierter Signale**

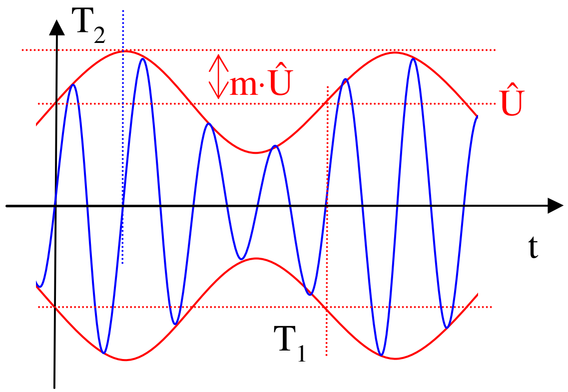
Ein hochfrequenten Trägersignal kann in seiner Amplitude ($\hat{U}_{HF}$), in seiner Frequenz (ω_{HF}) oder in seiner Phase (φ_{HF}) moduliert werden.

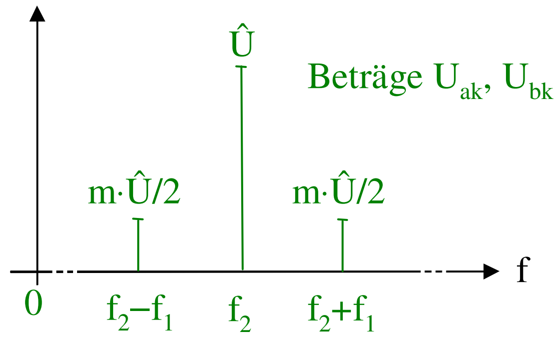
$$u_{HF}(t) = \hat{U}_{HF}\sin(\omega_{HF}t + \varphi_{HF})$$

Amplitudenmodulation → Multiplikation der Amplitudenhüllkurve mit einer konstanten hochfrequenten Schwingung

$$u(t) = \underbrace{\hat{U}\,(1 - m \cdot \sin\omega_1 t)}_{\substack{\text{NF Hüllkurve} \\ \text{Amplitude der HF}}} \cdot \underbrace{\sin\omega_2 t}_{\text{HF}} \quad (= \hat{U}(t)\,\sin\omega_2 t)$$

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin\omega_2 t - \hat{U}\,\frac{m}{2}\left[\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t\right]$$





Modulationsgrad (m) maximal 1,0 (Praxis ca. 0,8)

→ Leistung ($P \sim u^2$) → Seitenbänder P_{Nutz} gegenüber Trägerleistung $P_{Träger}$

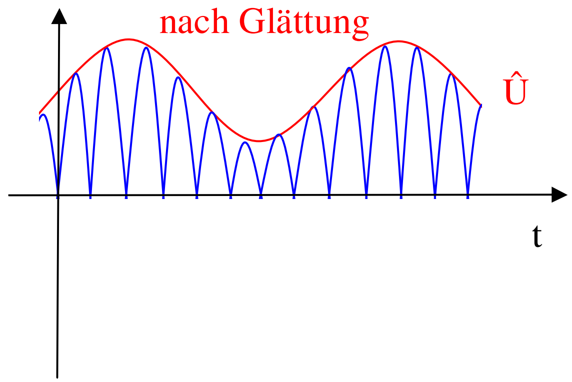
→ $P_{Nutz} = 2(m\hat{U}/2)^2 = m^2\hat{U}^2/2 < ½\,\hat{U}^2 = ½\,P_{Träger}$

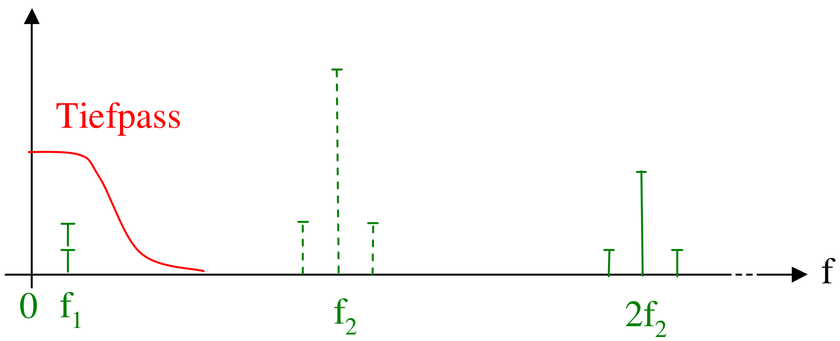
Bandbreite (z.B. Übertragung bis $\omega_{NF} = 2\pi \cdot 15\ \mathrm{kHz}$ HiFi-Norm)
$\rightarrow$ zwischen unterster $(\omega_{HF} - \omega_{NF})$ und oberster Frequenz $(\omega_{HF} + \omega_{NF})$
$\rightarrow$ Bandbreite $\Delta\omega_B = 2\omega_{NF} > 2\pi \cdot 30\ \mathrm{kHz}$ (ohne Stereoübertragung)
$\rightarrow$ Einseitenbandmodulation mit unterdrücktem Träger nur ω_{NF}

Bei **Modulation** und **Multiplikation** entstehen neue Frequenzen im Gegensatz zur Addition.

Die Demodulation erfolgt bei der Amplitudenmodulation

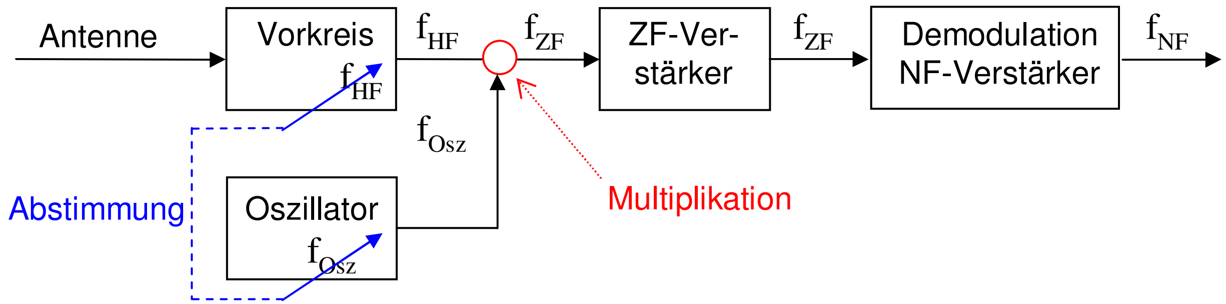
- entweder durch eine Gleichrichtung und anschließende Glättung
- oder durch nochmalige Multiplikation (Überlagerung) mit $\cos\omega_2 t$ sowie anschließender Tiefpassfilterung





Das Überlagerungsverfahren dient allgemein zur Frequenzumsetzung.

Beispiel: Überlagerungsempfänger (Superhet–Empfänger)



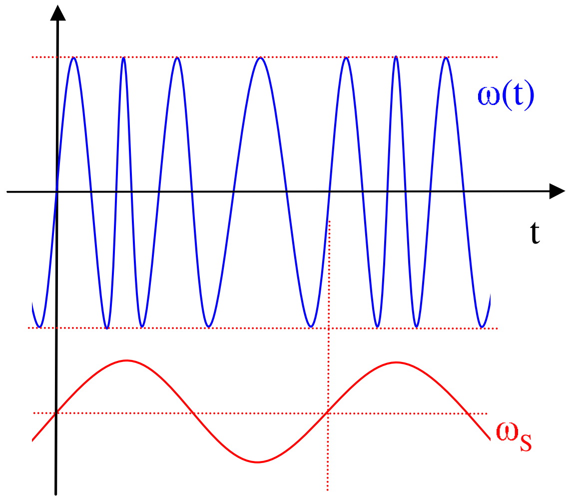
- Oszillatorfrequenz wird gemeinsam mit Frequenz des Vorkreises abgestimmt $\rightarrow$ $f_{HF} - f_{Osz}$ oder $f_{Osz} - f_{HF}$ immer genau f_{ZF}
- Spiegelselektion sperrt $f_{Spiegel}$
- konstante Zwischenfrequenz f_{ZF} (unabhängig von f_{HF})
  - hochwirksamer ZF-Verstärker als Resonanzverstärker
  - günstige Frequenz, Bandbreite und Verstärkung
  - viele Filterkreise hintereinander (5 bis 7) $\rightarrow$ hohe Trennschärfe

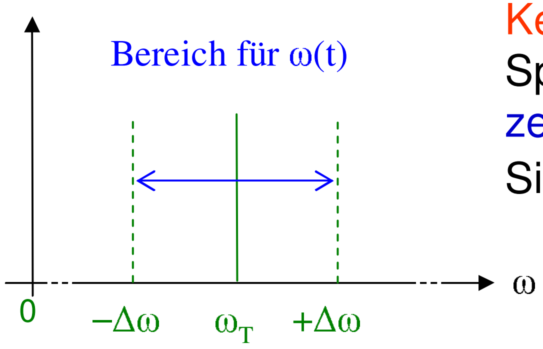
Frequenzumsetzung Trennung Bild und Ton bei TV, Umsetzung der Signale vom TV-Satellit im LNS

Durch Multiplikation (Überlagerung) kann ein Frequenzband in einen fast beliebigen anderen Frequenzbereich umgesetzt werden.

Frequenzmodulation → Information in der Frequenz

$$\omega(t) = \omega_T\left(1 + m \cdot \cos \omega_S t\right) = \omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_S t$$





Kein Spektrum!
Spektrum muss aus zeitunabhängigen Sinusanteilen bestehen

ursprünglich „$\cos \Phi$“ wird nur für den Fall, dass $d\Phi/dt = \text{const} = \omega$ ist, zu „$\cos \omega t$“

$$\Phi(t) = \int_0^t \omega(t)\, dt = \int_0^t \left(\omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_S t\right) dt$$

$$\Phi(t) = \omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_S} \cdot \sin \omega_S t \qquad \text{mit } \Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_S} = \frac{\Delta f}{f_S}$$

Phasenhub $\Delta\varphi$, Frequenzhub Δf

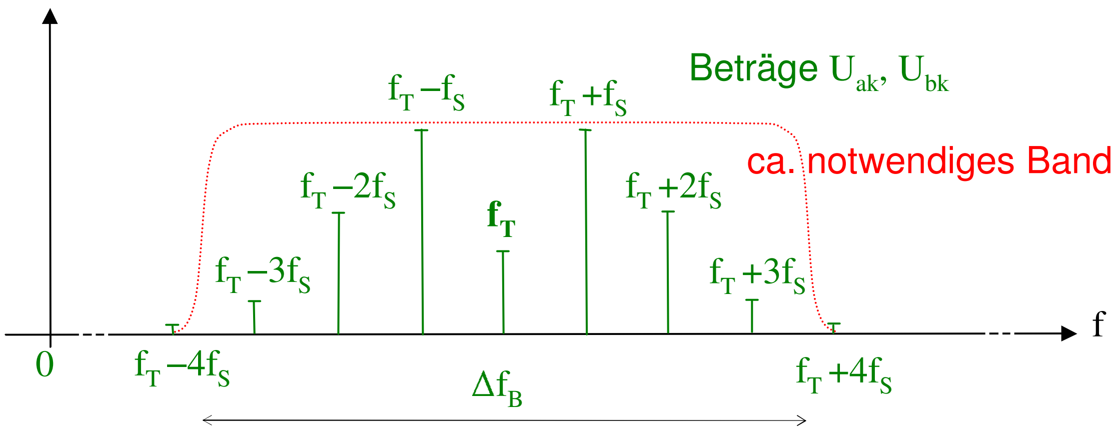
damit kann das frequenzmodulierte Signal geschrieben werden

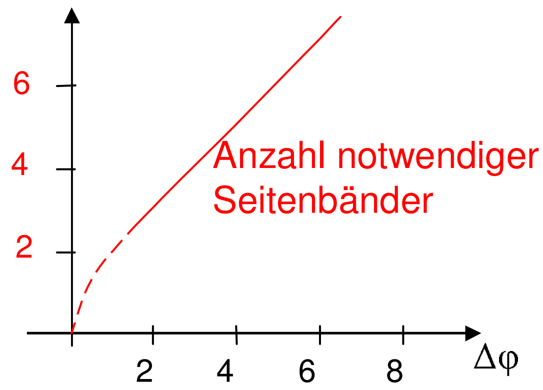
$$u(t) = \hat{U}_T \cos\left(\omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_S} \cdot \sin \omega_S t \right)$$

Δf mit f_S dividiert $\rightarrow$ für höhere Signalfrequenzen f_S wird $\Delta\varphi$ verkleinert

Spektrum nach der Fourierreihe

$$u(t) = \hat{U}_T \left\{ \begin{aligned} & J_0(\Delta\varphi)\cos(\omega_T t) + J_1(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + \omega_S)t - \cos(\omega_T - \omega_S)t] \\ & + J_2(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 2\omega_S)t + \cos(\omega_T - 2\omega_S)t] \\ & + J_3(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 3\omega_S)t - \cos(\omega_T - 3\omega_S)t] + \ldots \end{aligned} \right\}$$





Seitenbandfrequenzen (kleiner als 10% der Amplitude des unmodulierten Trägers vernachlässigt) $\rightarrow$ notwendige **Bandbreite** (nach Carson)

$$\Delta f_{B\,min} = 2(\Delta\varphi + 1) f_{S\,max} \qquad \text{für } \Delta\varphi > 1.$$

d.h., auf jeder Seite $\Delta f_{B\,min}/2f_{S\,max} = \Delta\varphi + 1$ Seitenbandfrequenzen

- **UKW Rundfunk** $\rightarrow$ Festlegung des $\Delta f = 75$ kHz, HiFi-Qualität $f_{S\,max} = 15$ kHz $\rightarrow$ Phasenhub $\Delta\varphi = 5$, notwendige Bandbreite 180 kHz (Seitenbandfrequenzen 6)
- Bei Beibehaltung von $\Delta\varphi = 5$ aber $f_{S\,max} = 60$ kHz (Stereo mit RDS) nicht ganz 400 kHz

Mit $\Delta\varphi = \Delta f/f_S$ $\rightarrow$ für hohe Signalfrequenzen bei konstantem Δf (repräsentiert Signalamplitude) $\rightarrow$ sinkende Übertragungsqualität
$\rightarrow$ hohen Frequenzen Verstärkung der Amplitude – **Präemphase**
$\rightarrow$ im Empfänger wieder Absenkung – **Deemphase**
$\rightarrow$ RC - Hochpass Zeitkonstante 50 µs (UKW in Europa)

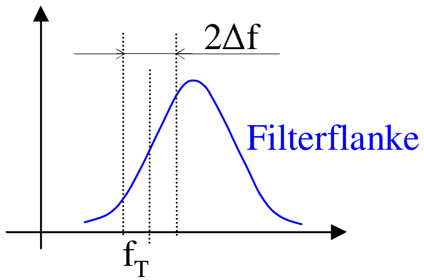
Frequenzmodulation $\rightarrow$ direkt bei Schwingungserzeugung Beeinflussung der Frequenz

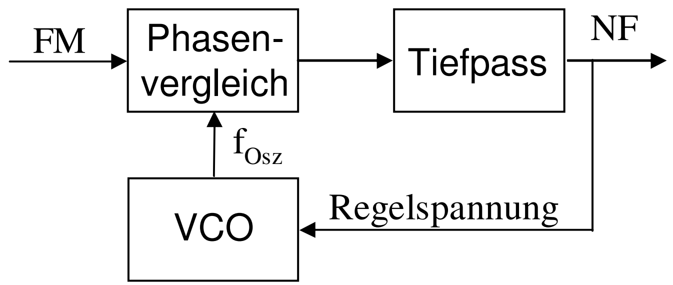
- Im einfachsten Fall durch Kondensatormikrofon oder
- durch spannungsgesteuerten elektronisch realisierten Blindwiderstand

Demodulation bei Frequenzmodulation nicht einfach

Zuerst alle Amplitudenstörungen durch **Begrenzer** beseitigen danach:

- **entweder** durch Flanken-, Phasen- (= Verhältnis-) bzw. Zähldiskriminator in Amplituden-, Phasen- oder Pulsmodulation gewandelt → AM-Demodulator (Gleichrichter), phasenempfindlichen Gleichrichter (Verhältnisgleichrichter, Ringmodulator) bzw. nur einen Tiefpass
- **oder aber** in heutiger Zeit durch einen PLL Demodulator





- Filterkurve wird so justiert, dass die Flanke die FM in eine AM wandelt
- PLL-Kreis (Phasenregelkreis) → VCO wird der FM nachgeführt, → **Regelspannung ist exakt das NF-Signal** (gut als integrierte Schaltung)

Phasenmodulation → der Frequenzmodulation sehr ähnlich $\Delta\varphi \sin\omega_S t = \Delta\varphi(t)$

Insgesamt zeigen sich zwei äquivalente Betrachtungsweisen für Signale und Systeme – die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung** –

Aufgabe 2.2.1

Addition der Teilschwingungen eines Rechtecksignals mit einem Simulationsprogramm bei $\hat{U} = 5\ \mathrm{V}$, $T = 2\ \mathrm{ms}$.

Frage 1: Wie sehen die Grund- und ersten Oberschwingungen (n = 3, 5 ,7) einzeln aus?

Frage 2: Wie sieht das Signal bei schrittweiser Addition der Oberschwingungen (von der 3. bis zur 7.) aus?

Frage 3: Wie sehen das Amplituden- und das Phasenspektrum aus?

Aufgabe 2.2.2

Spektrum eines amplitudenmodulierten Signals mit $\hat{U}_T = 100\ \mathrm{V}$, $f_T = 500\ \mathrm{kHz}$ und zwei Sinussignalen $\hat{U}_1 = 30\ \mathrm{V}$, $f_{S1} = 80\ \mathrm{Hz}$ und $\hat{U}_2 = 20\ \mathrm{V}$, $f_{S2} = 12000\ \mathrm{Hz}$ (Mittelwellensignal)

Frage 1: Wie sieht die Darstellung des Spektrums der Beträge der Amplituden aus?

Frage 2: Welche Übertragungsbandbreite ist mindestens erforderlich?

Aufgabe 2.2.3

Drei Sprachsignale ($f_M = 200 \ldots 3600\ \mathrm{Hz}$) sollen frequenzmultiplex übertragen werden. Zwischen den Übertragungskanälen ist ein Frequenzabstand von $400\ \mathrm{Hz}$ vorzusehen und der erste Kanal soll bei $4\ \mathrm{kHz}$ beginnen.

Frage 1: Welche Oszillatorfrequenzen wählen Sie für eine Frequenzumsetzung?

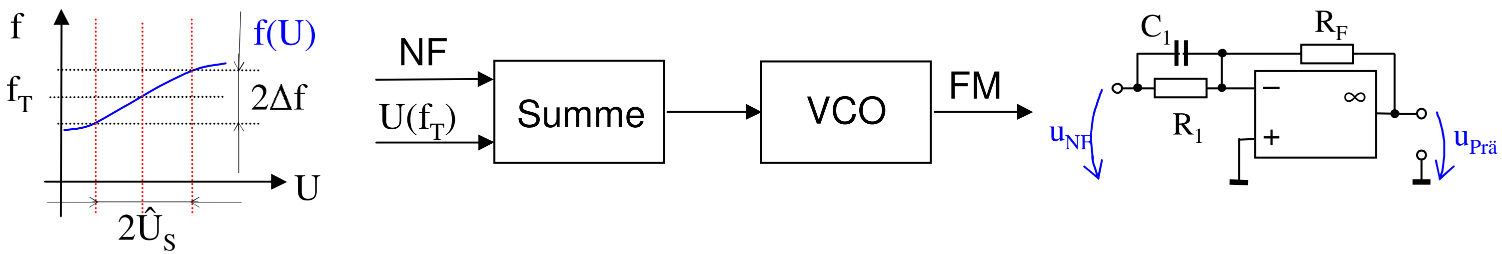
Frage 2: Es wird eine Multiplikationsschaltung genutzt, welche Frequenzen müssen wieder entfernt werden?

Hinweis: Im Vergleich mit einer Amplitudenmodulation soll immer nur ein Seitenband übertragen werden.

Aufgabe 2.2.4

Ein VCO wird zur Frequenzmodulation genutzt. (Ausgangsspannung konstant $10\ \mathrm{V}$) $U(f_T)$ dient der Feinabstimmung der Trägerfrequenz zu $f_T = 100\ \mathrm{MHz}$. Das NF-Signal ist $\hat{U}_S \cos\omega_S t$.

Dabei wurde $\hat{U}_S$ so gewählt, dass $\Delta f = 75\ \mathrm{kHz}$ wird. Die Testsignalfrequenz beträgt einmal $f_S = 1\ \mathrm{kHz}$ und zum anderen $10\ \mathrm{kHz}$.



Frage 1: Wie lauten $\omega(t)$, $\Delta\varphi$ und $u(t)$?

Frage 2: Wie viel wird das Signal von $10\ \mathrm{kHz}$ durch eine Präemphase ($\tau = C_1R_1 = 50\ \mu\mathrm{s}$) angehoben, wie sieht qualitativ der Frequenzgang aus (bis ca. $20\ \mathrm{kHz}$)?

Hinweis: Z_1 sinkt mit steigender Frequenz und $|v| = R_F/Z_1$ steigt gegenüber $v(f = 0) = R_F/R_1$.

Zusatzaufgabe: Simulieren Sie die Anordnung