3. Nichtperiodische Signale

3.1 Nichtperiodische Signale endlicher Länge

Die **Fouriertransformation** zerlegt nichtperiodische Signale endlicher Länge in ein kontinuierliches endliches Frequenzspektrum.

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t \right] d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(\omega t)\, dt$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin(\omega t)\, dt$$

- **Alle Frequenzen** sind stationär im
- Zeitraum von $-\infty < t < \infty$ vorhanden.
- Konvergent für:
- u(t) = 0 für t < tAnfang und t > tEnde
- **Frequenzspektrum** ist also zeitkonstant
- **Mathematischer Bildbereich**

Zwei mathematisch äquivalente Betrachtungsweisen für Signale und Systeme → die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung**

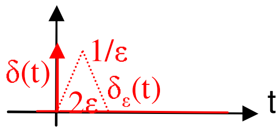
- andere Schreibweisen, FFT, Überlagerungssatz, → Signalanalyse
- diskrete Fouriertransformation, zeitabhängige Kurzzeitspektren, die Hilberttransformation oder die Korrelationsanalyse

Weiterführung: Diskrete Signale (nur zu diskreten Zeitpunkten t_i von Null verschiedener Wert) → **diskrete Fouriertransformation**

Messwertabtastung oder A/D-Wandlung

Mathematisch → Multiplikation mit einer Folge von Stoßfunktionen

$$u(t_i) = u(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)$$



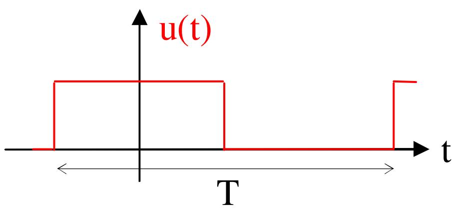
Definition: Fläche = 1

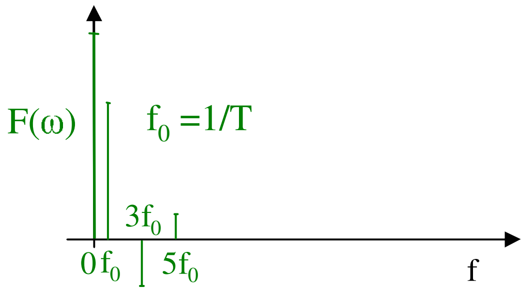
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Diskrete periodische Signale sind der Gegenstand der diskreten Fouriertransformation (DFT)

Einordnung der Eigenschaften in einer Gegenüberstellung

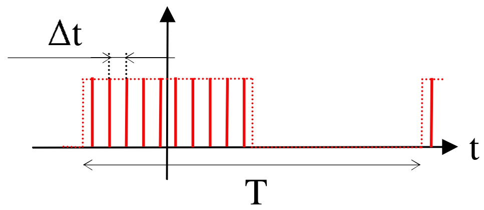
kontinuierl. period. Signal ➡ diskretes endliches Spektrum

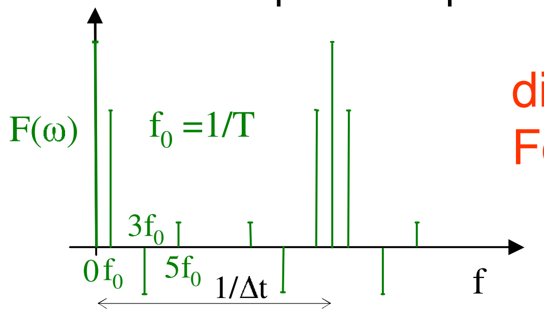




Fourierreihe

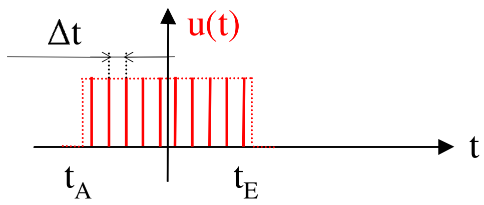
diskretes period. Signal ➡ diskretes period. Spektrum

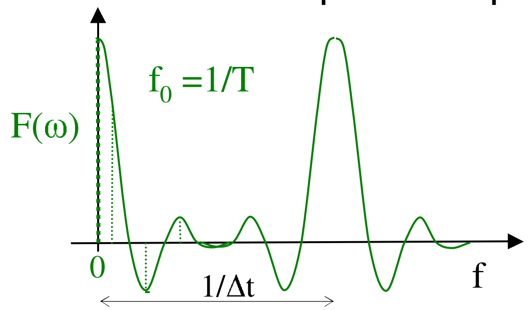




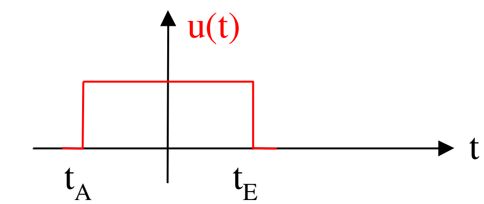
diskrete Fouriertransformation

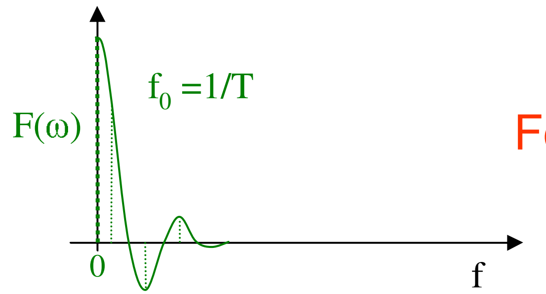
diskretes endliches Signal ➡ kontinuierl. period. Spektrum





kontinuierl. endliches Signal ➡ kontinuierl. endliches Spektrum





Fouriertransformation

Aus Abtastwerten der Grundperiode des Signals $-T/2 \le t < T/2$ → numerisch direkt Spektralwerte des Bereiches $0 \le f \le 1/\Delta t$. → periodische Fortzusetzung

Es muss exakt die Grundperiode sein.

$$u(t_i) = u_i = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{U}_{ck} e^{jk\frac{2\pi i}{n}}$$

$$\underline{F}(f_i) = \underline{U}_{ci} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k)\; e^{-jk\frac{2\pi i}{n}} \qquad \text{für } i = 0,1,2,\ldots n-1$$

$$\text{mit } t_i = i\,\Delta t \text{ und } T_0 = n\Delta t \text{ also } \omega_0 t_i = 2\pi f_0\, t_i = 2\pi\, i/n \text{ und } f_i = i\, f_0 = \frac{i}{n\Delta t}$$

Eigenschaften der diskrete Fouriertransformation → für weitere Fälle nutzbar.

- Diskretes endliches (einmaliges) Signal (Einschränkung: nur „abgetastetes“ Spektrum des Bereiches $0 \le f \le 1/\Delta t$ wird bestimmt) → periodisch
- Kontinuierliches periodisches Signal abgetastet → Spektralwerte des Bereiches $0 \le f \le 1/2\Delta t$ als diskretes endliches (einmaliges) Spektrum (Fourierreihe)
- Kontinuierliches endliches (einmaliges) Signal abgetastet → Spektralwerte des Bereiches $0 \le f \le 1/2\Delta t$ als abgetastetes Spektrum (Fouriertransformation)

In der Regel möglich, die Grundperiode genau 2n mal äquidistant abzutasten.
→ schnelle Algorithmus (**FFT)** anstelle DFT nutzbar

Für **praktische Anwendung** sind einige Bedingungen zu beachten.

1. Genau eine (oder mehrere) Grundperioden äquidistant und synchron zur Periode abtasten. (**Hilfestellung**: Die numerische Berechnung ist so, als ob der abgetastete Bereich immer wieder komplett angehängt wird).
2. Abtastung muss so schnell erfolgen ($1/\Delta t$ groß genug), dass die Perioden des Spektrums nicht ineinander laufen. (Aliasingfehler)
3. Wenn Abtastung nicht nach 1. und 2. müssen durch Interpolation neue Abtastwerte bestimmt werden. (wenn: nicht äquidistante, nicht synchrone Abtastung oder wenn für FFT nicht 2^n Abtastwerte)
4. Ist es nicht möglich, die Abtastung so vorzunehmen (wenn Grundperiode im Rauschen nicht erkennbar), geeignete Fensterfunktion benutzen und die Abtastung dieser zuordnen.

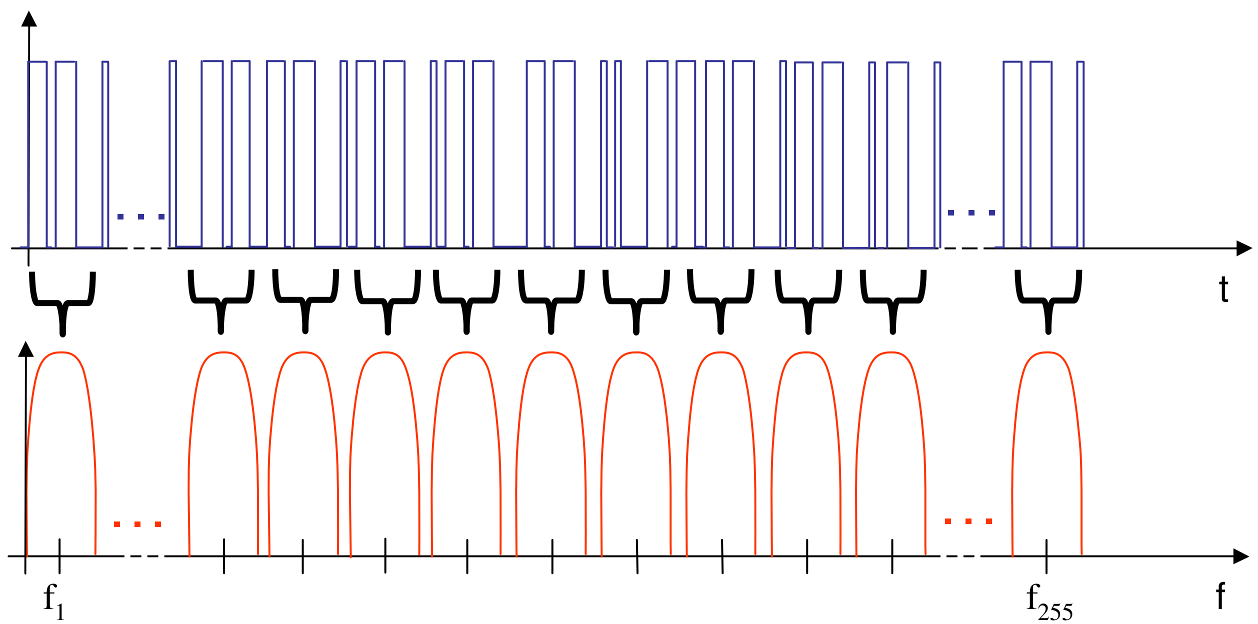
Bei der praktischen Anwendung der **DFT** → gute Vorbereitung der Messung → Sorgfalt erforderlich → sonst entstehen unkalkulierbare Fehler

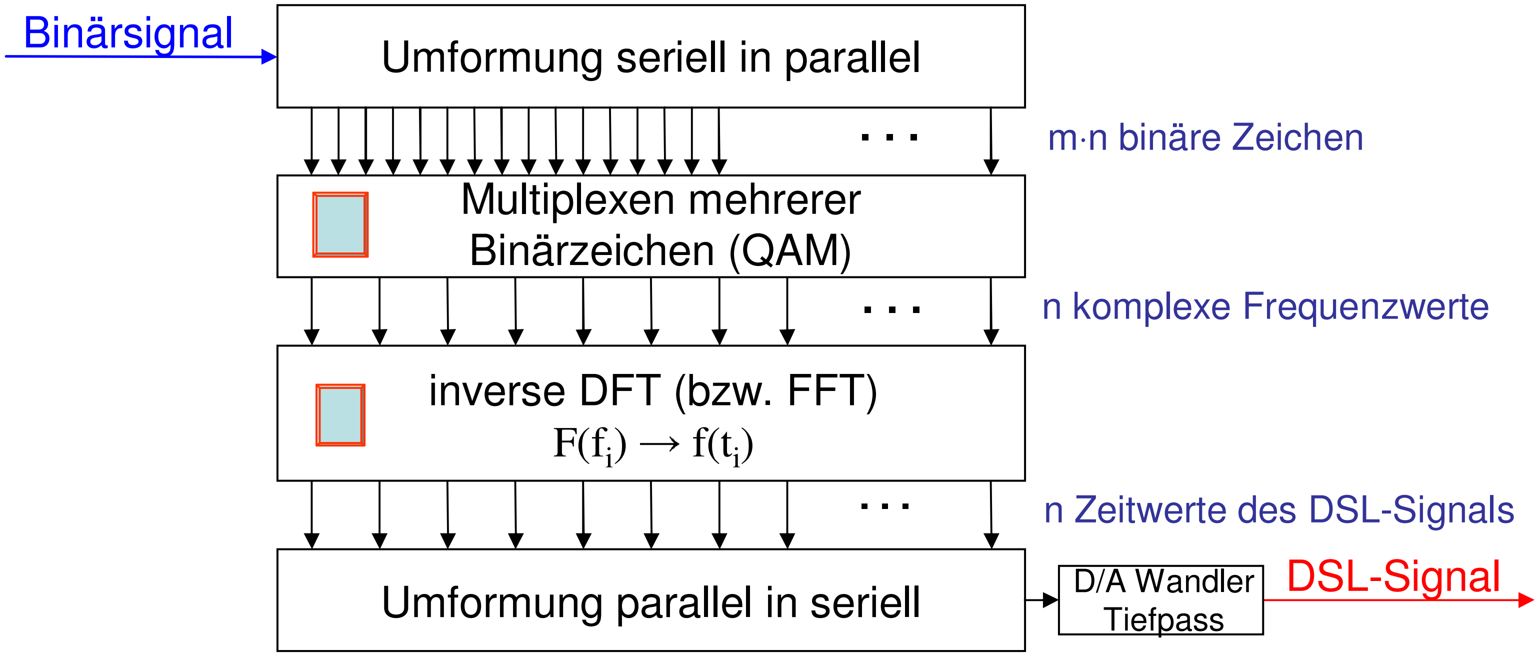
Beispiel: OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex)

Vielfältige moderne Anwendungen der DFT/FFT → Beispiel Realisierung der **Modulation einer ADSL-Übertragung**

Hier soll das **Grundprinzi**p herausgestellt werden:
Es sollen die **seriellen** Daten der Pakete in vielen Frequenzkanälen **parallel** übertragen werden.

- Dazu müssen Daten eines **Zeitintervalls** auf die Kanäle aufgeteilt,
- dann im gesamten Zeitintervall **parallel übertragen** werden,
- indem die Frequenzen in diesen Kanälen entsprechend **moduliert** werden.

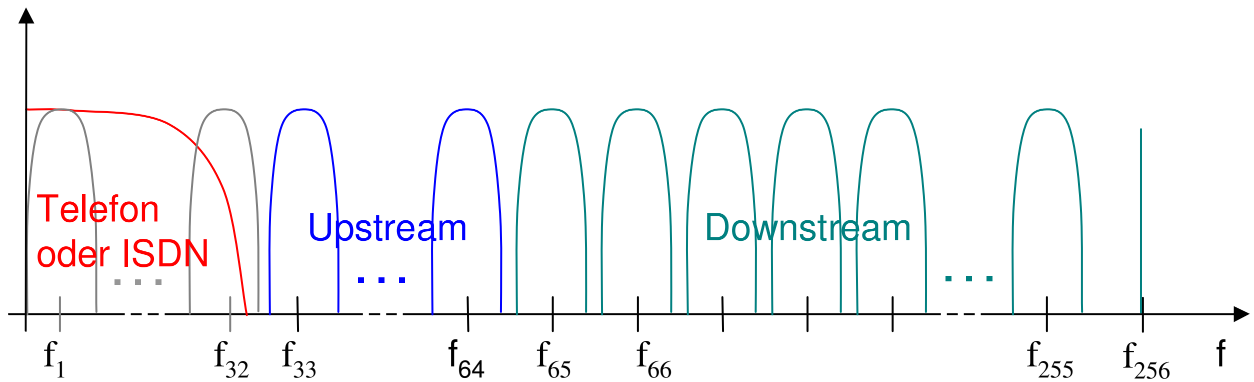




1. Binärsignal → Datenpuffer → serielles in ein paralleles Signal
2. Multiplexen → Binärzeichen durch Quadratur Amplituden Modulation (QAM)
3. Zuordnung paralleler Frequenzwerte F_i, φ_i als Diskrete-Multiton-Amplituden
4. **inverse** diskrete Fouriertransformation
5. Ausgabe digitalen Zeitwerte $f(t_i)$
6. seriell auslesen, digital- analog wandeln und glätten

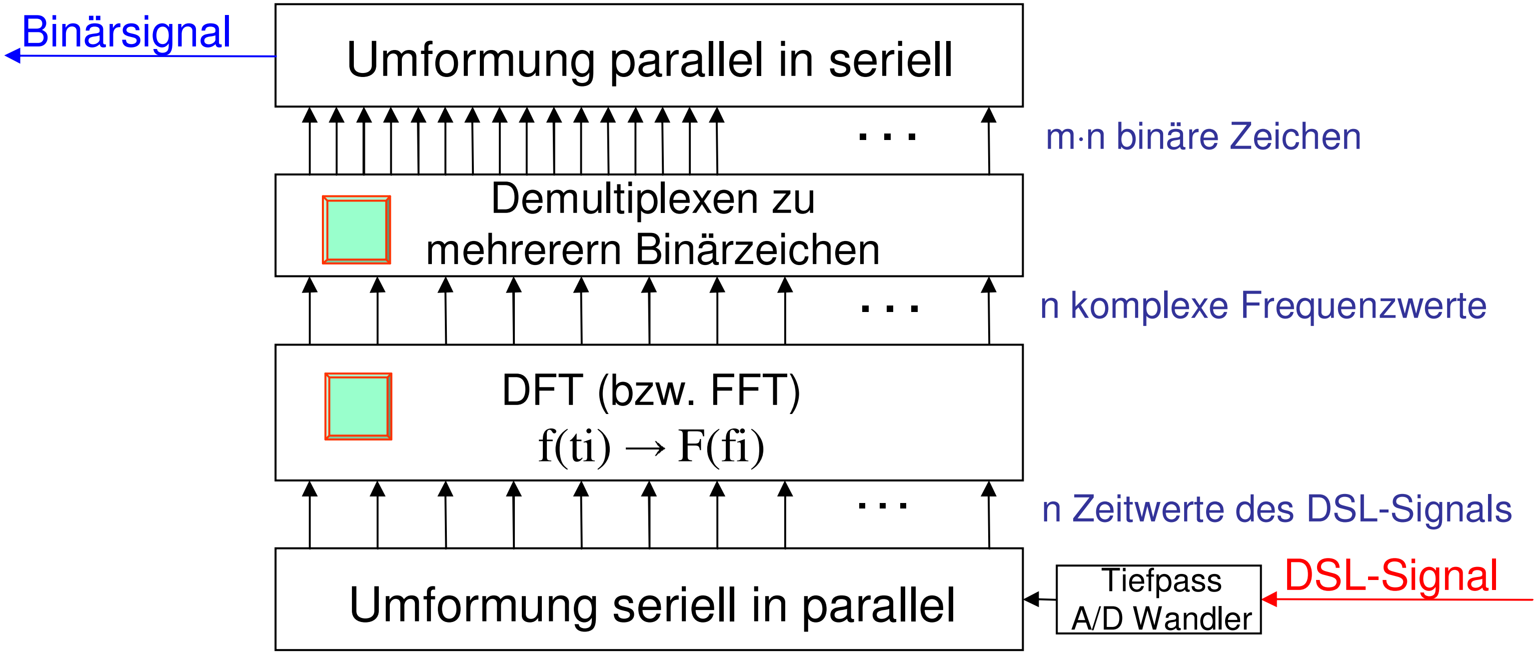
Diskreten-Multiton-Modulation (DMT) mit **256** Frequenzbändern je ca. 4 kHz

- 1. bis 32. für analoges Telefon bzw. ISDN freigehalten
- 33. bis 64. für die Übertragung des Upstreams
- 65. bis 255. für den Downstream
- (und eins für einen Pilotton zur Synchronisation)
- zusammen ca. 1,1 MHz



praktische Realisierung → mit digitalen **Signalprozessor** (DSP) **+** Mikrokontroller zur Steuerung des Ablaufs
→ wenige integrierte Schaltkreise im Modem, keine R, C, L Filter

Demodulation auf Empfangsseite → umgekehrt diskreten Fouriertransformation



Modem senden und empfangen → zwei verschiedene Modem notwendig
Provider: 31 Kanäle für Empfand und 190 zum Senden
Nutzer : 190 Kanäle für Empfand und 31 zum Senden

Aufgabe 3.1.1

Führe eine Analyse des Rechtecksignals mit einem Simulationsprogramm bei $\hat{U} = 5\ \mathrm{V}$, $T = 2\ \mathrm{ms}$. mit der FFT bei $n = 4, 8, 16, 32$ und 512 Abtastwerten durch!

Frage 1: Wie viele Oberschwingungen werden jeweils bestimmt?
Frage 2: Wie ändert sich die Amplitude der jeweils höchsten ermittelten Oberschwingung?
Hinweis: Lege den abgetasteten Wert jeweils in die Mitte von Δt.

Zusatzfrage 1:Wie ändert sich das Spektrum, wenn der erste Wert weggelassen und dafür am Ende ein Wert mehr genutzt wird?
Zusatzfrage 2:Wie ändert sich das Spektrum, wenn die Periode nur in n-1 Intervalle eingeteilt wird und dafür ein Intervall angehängt wird?