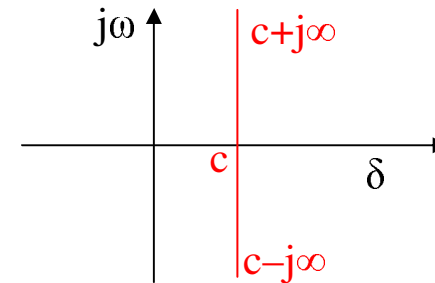


3.2 Schalt- und Übergangsvorgänge

In der Elektrotechnik sind oft **Übergangsvorgänge** (insbesondere **Ein- oder Ausschalten**) zu untersuchen. Das kann vereinfacht werden.

Erweiterung der **imaginären** Kreisfrequenz $j\omega$ mit einem Dämpfungsanteil zur **komplexen** Variablen $p = -\delta + j\omega \rightarrow$ anfangsbegrenzte Vorgänge (0 für $t < 0$)

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p) dp \quad \text{mit} \quad p = -\delta + j\omega$$



$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt$$

$$F(p) = L\{f(t)\} \quad \text{oder} \quad F(p) \bullet \text{---} \circ \quad f(t) \quad \text{oder} \quad F(p) \leftrightarrow f(t)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} \quad \text{oder} \quad f(t) \circ \text{---} \bullet \quad F(p) \quad \text{oder} \quad f(t) \leftrightarrow F(p)$$



Einige **Rechenregeln** verdeutlichen die Eigenschaften der Laplacetransformation.

1. Additionssatz: $L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\}$

2. Integrationssatz: $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} L\{f(t)\}$

3. Differentiationssatz: $L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = p L\{f(t)\} - f(t=0)$

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n L\{f(t)\} - p^{n-1} f(t=0) - p^{n-2} f^{(1)}(t=0) \dots - f^{(n-1)}(t=0)$$

4. Verschiebungssatz: $L\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 p} L\{f(t)\}$

5. Dämpfungssatz: $L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha)$

6. Faltungssatz: $L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right\} = L\{f_1(t)\} \cdot L\{f_2(t)\}$

Bei 3. sind die **Anfangsbedingungen** in der Praxis oft $f(t=0) = 0$.

Das Integral 6. ist das **Faltungsintegral**, das bei Signalanalyse und -synthese eine wichtige Rolle spielt.

wichtige Funktionen in Tabellen → **Korrespondenztabelle**

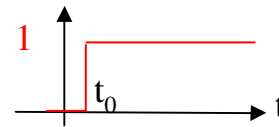
1



Sprungfunktion: (Sprich: „Eins von t“)

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t) dt = \frac{1}{p}$$

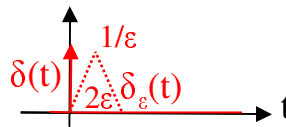
2



Verschobene Sprungfunktion:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t < t_0 \\ 1 & \text{für } t > t_0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t - t_0) dt = \frac{1}{p} e^{-pt_0}$$

3

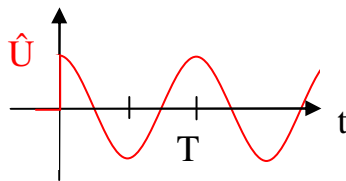


Stoßfunktion: mit Definition: **Fläche = 1**

(Dreiecksfläche $A_{\Delta} = \frac{1}{2} 2\epsilon \cdot 1/\epsilon = 1$), auch für $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1$$

4



Bei $t = 0$ beginnender **Kosinus:**

$$\hat{U} \cos \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

5 Bei $t = 0$ beginnender **Sinus:** $\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

6 Bei $t = T/4$ beginnender Sinus:

$$\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t - T/4) = \hat{U} \cos \omega(t - T/4) \cdot 1(t - T/4) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} e^{-pT/4} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

Bei „energielosem“ Anfang werden die **Strom-Spannungs-Beziehungen**:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow U_L(p) = L[p I(p) - i(0)] = pL I(p)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \leftrightarrow I_C(p) = C[p U(p) - u(0)] = pC U(p)$$

Damit können auch **Schaltungen in den Laplacebereich transformiert** werden:

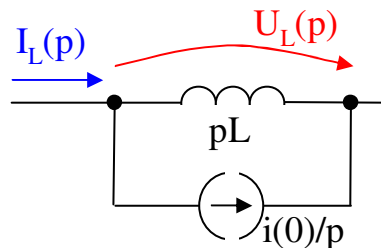
Festlegung: Widerstände im Laplacebereich

$$R \leftrightarrow R$$

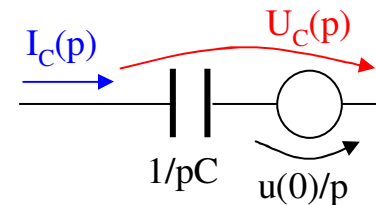
$$L \leftrightarrow pL$$

$$C \leftrightarrow 1/pC$$

Eigentlich **nur Einschaltvorgänge** → für **Ausschalt- und Übergangsvorgänge** zu Beginn durch **Quellen $\cdot 1(t - t_{\text{Beginn}})$** Anfangszustand „zwangsweise“ herstellen.

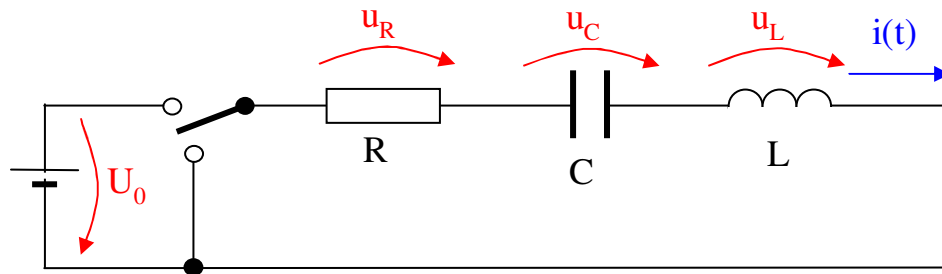


$$\text{KS: } I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL} + \frac{i(0)}{p}$$



$$\text{MS: } U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p}$$

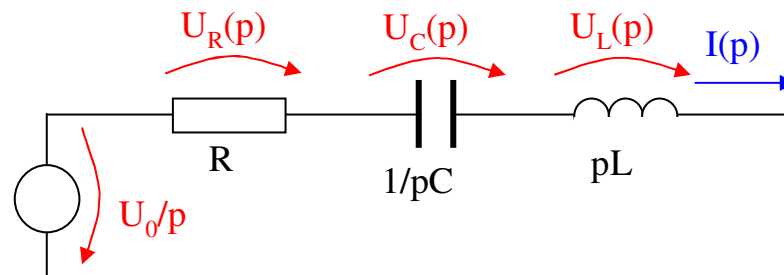
Beispiel: Analyse des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises



idealen Schalter

$$R_{\text{Ein}} = 0, R_{\text{Aus}} = \infty \text{ und } t_{\text{Schalt}} = 0$$

Laplacebereich transformierte Schaltung für **Einschalten** →
Gleichspannungsquelle **und** Schalter → Quelle $U_0 \cdot 1(t)$



Strom folgt aus **Ohm'schen Gesetz**

$$I(p) = \frac{U_0/p}{R + 1/pC + pL} = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + R/2L)^2 + 1/LC - (R/2L)^2}$$

$$I(p) = \frac{U_0/L}{(p + \delta)^2 + \omega_e^2}$$

Formen der **Korrespondenz**

Dämpfung $\delta = R/2L (= \beta)$

Eigenkreisfrequenz $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \delta^2 (= \alpha^2)$

$\omega_e \rightarrow$ **drei Fälle** zu unterscheiden:

Periodischer Fall: $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$

Dieser führt zu einer **gedämpften Schwingung** mit der Eigenfrequenz ω_e .

Aperiodischer Grenzfall: $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$

Dieser führt zu dem **schnellsten Übergangsvorgang** ohne Nachschwingen.

Aperiodischer Fall: $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$

Dieser führt zu einem **langsam gedämpften Übergangsvorgang** (ohne Schwingen).

periodischen Fall wird nach Tabelle:

$$i(t) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\omega_e} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t) = \frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t)$$

Sinusschwingung, die bei $t = 0$ beginnt und deren **Amplitude** $U_0 e^{-\delta t} / \omega_e L$ mit der Zeit abnimmt.

aus **Strom-Spannungs-Beziehungen** $\rightarrow u_R, u_L, u_C$

Grundlagen zeitveränderlicher Signale, Analyse von Systemen der Audio- und Videotechnik

$$i(t) = \frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t)$$

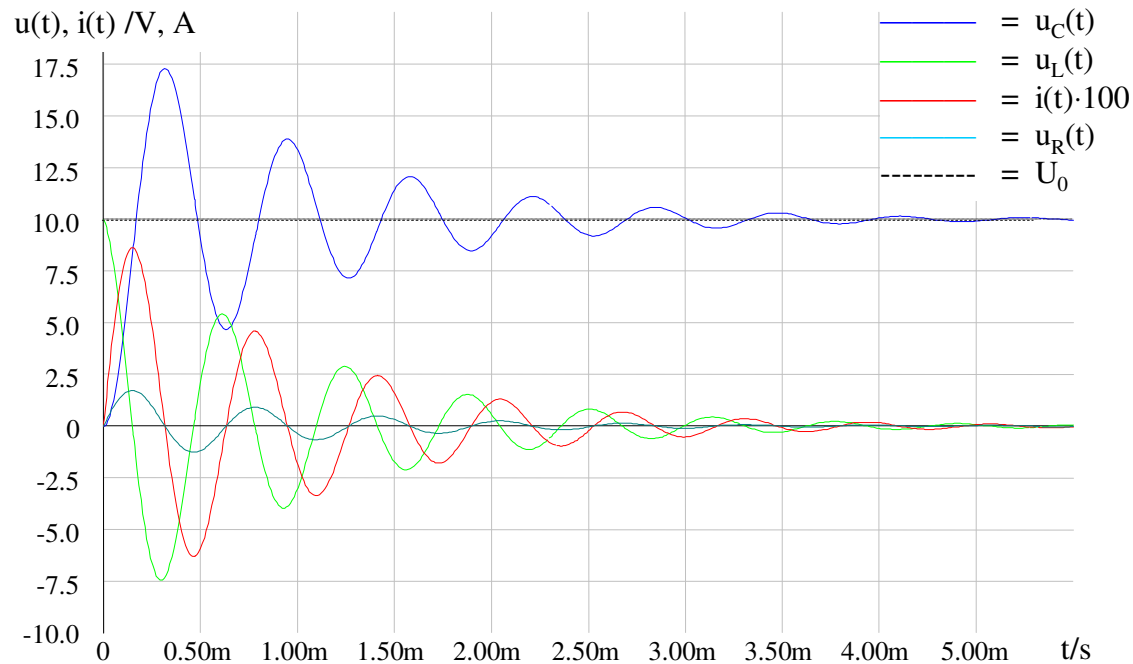
$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \right) \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = U_0$$

$$u_C(\infty) = U_0$$



aperiodischer Grenzfall

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

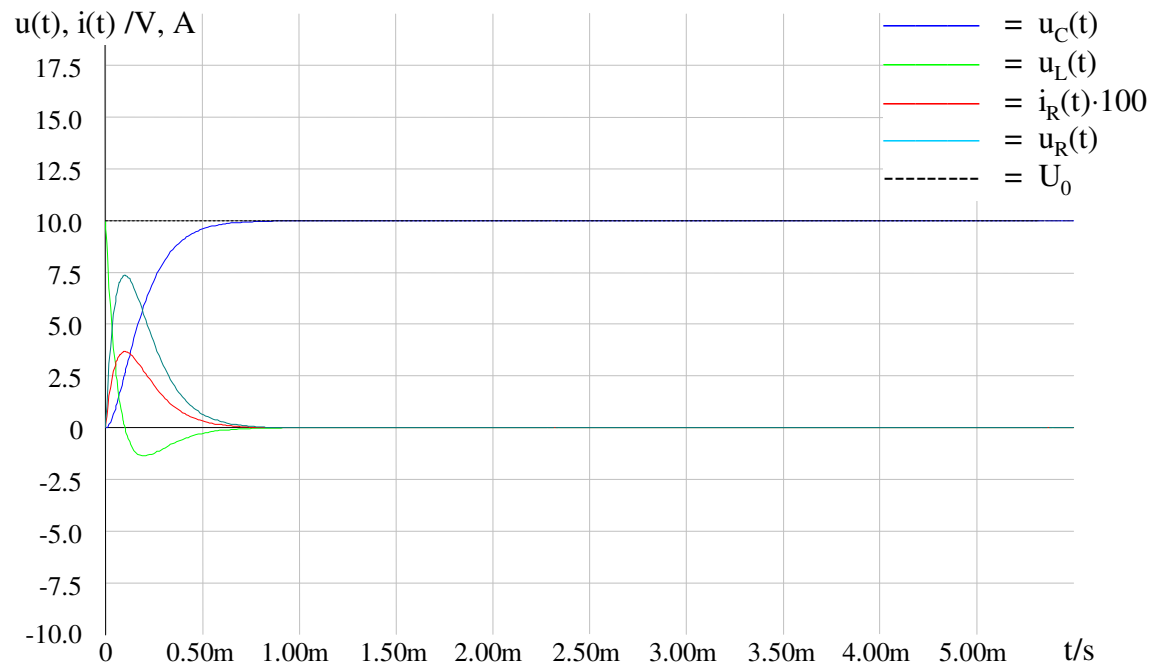
$$u_L(t) = U_0(1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0(1 - (1 + \delta t) e^{-\delta t}) \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = U_0$$

$$u_C(\infty) = U_0$$

linearen Anstieg, schnell zu Null gedämpft



für den **aperiodischen Fall** wird nach Linearfaktorzerlegung die Form entsprechend Tabelle:

$$I(p) = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + \delta_1)(p + \delta_2)}$$

$$\text{mit } p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 \rightarrow p_{1,2} = \underline{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} = -\delta_{1,2}$$

→ **Strom**

$$i(t) = \frac{U_0/L}{\delta_1 - \delta_2} (e^{-\delta_2 t} - e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

- δ_1 relativ klein (**langsamer Vorgang**)
- δ_2 relativ groß (**schneller Vorgang**)
- zu Beginn heben sich beide genau auf

aperiodischen Fall

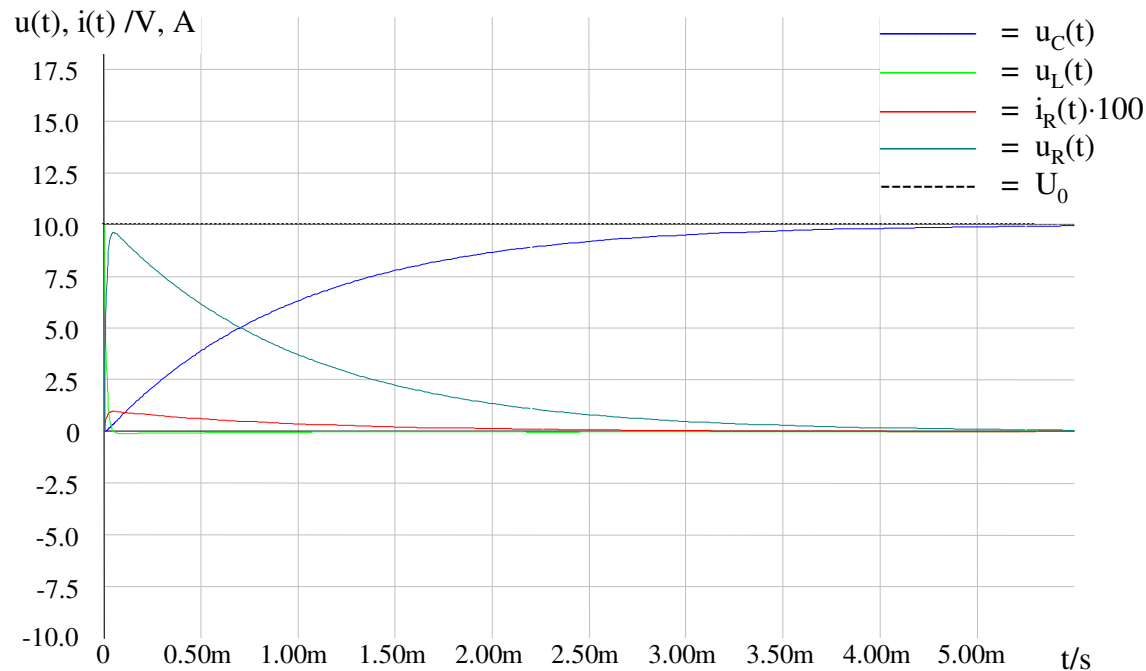
$$i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_R(t) = U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_1 (e^{-\delta_2 t} - 1) - \delta_2 (e^{-\delta_1 t} - 1)] \cdot 1(t)$$

$u_L(0) = U_0$
 $u_C(\infty) = U_0$



Allen drei Fälle: Spannung U_0 für $t \approx 0$ an L, für $t \rightarrow \infty$ an C

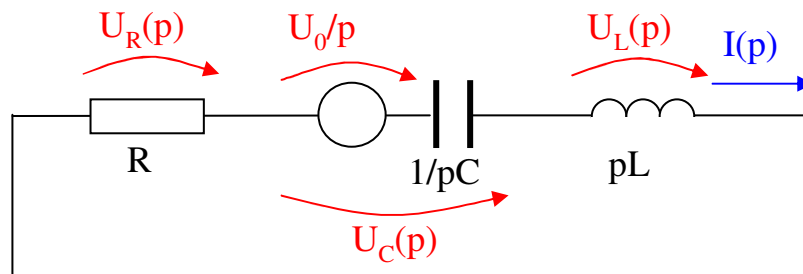
Strom ist Null bei $t \approx 0$ (L keine Sprünge), bei $t \rightarrow \infty$ (C kein Gleichstrom)

Da bei $t = 0$ **Strom nur beginnt**, kann Spannung an C erst **verzögert beginnen**.

Laplacebereich transformierte Schaltung für **Ausschalten**

Gleichspannungsquelle und Schalter \rightarrow **Kurzschluss**

C durch den Einschaltvorgang auf U_0 aufgeladen



Schaltung **wie** beim **Einschalten** nur die **Quelle** ist **umgepolt**

Außerdem $U_C(p) = U_0/p + I(p)/pC$

Rechnung vollkommen gleich

periodischen Fall

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t)$$

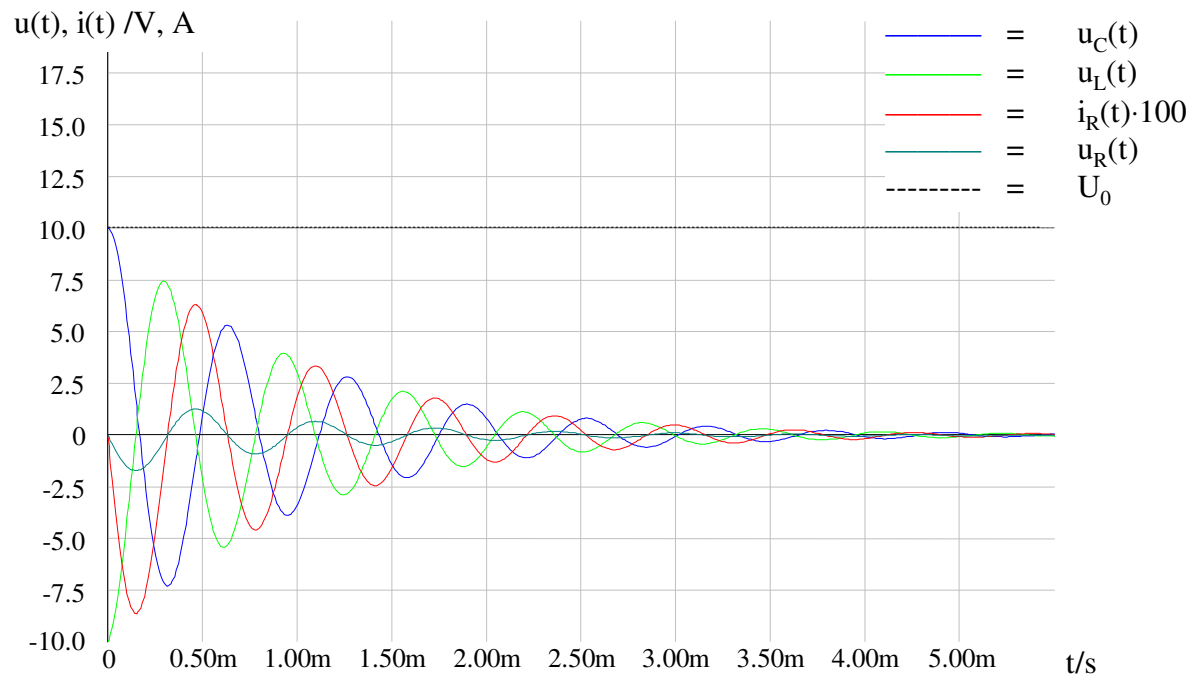
$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(\infty) = 0$$



aperiodischen Grenzfall

$$i(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

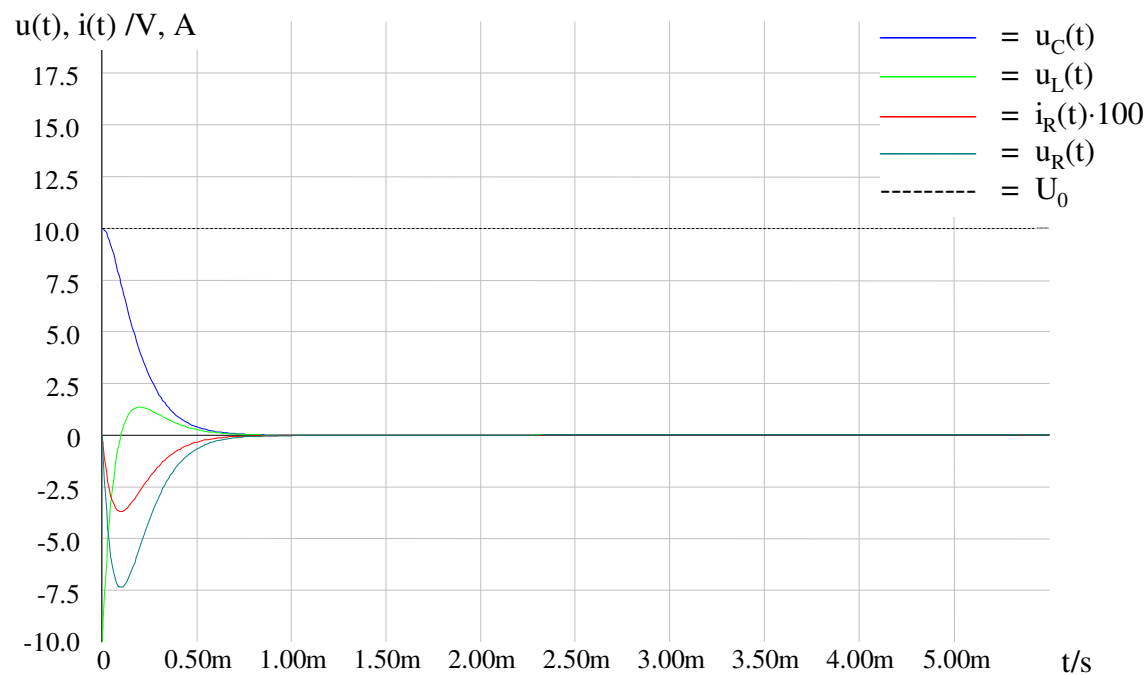
$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0(1 - \delta t)e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0(1 + \delta t)e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(\infty) = 0$$



aperiodischen Fall

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

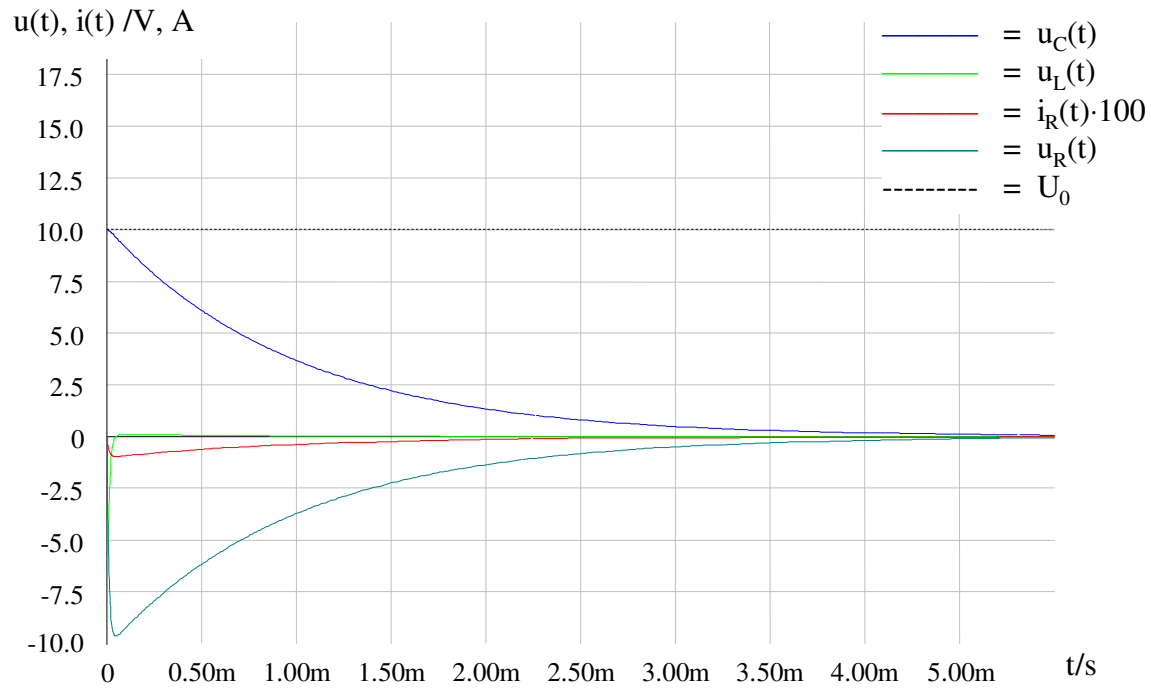
$$u_R(t) = -U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_2 e^{-\delta_1 t} - \delta_1 e^{-\delta_2 t}] \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(\infty) = 0$$



Aus **gemessenen Kurven** → **Parameter** U_0 , δ und ω_e (bzw. δ_1 und δ_2)
 (ω_0 damit festgelegt)

Kursorfunktionen des Oszilloskops für **drei markante Punkte**

Punkte **günstig wählen** → hohe Genauigkeit

- $u_C(t \rightarrow \infty)$ oder $u_C(t=0)$ als Punkt zur **Bestimmung von U_0**
- die ersten beiden Maxima **Bestimmung von $\omega_e = 2\pi/(t_{\text{Max } 2} - t_{\text{Max } 1})$**
- Mit $\omega_e t_{\text{Max } 1} = \pi/2$ des ersten sowie $\omega_e t_{\text{Max } 2} = 2\pi + \pi/2$ des zweiten Maximums für den **Strom** → δ und können danach ω_0 , L, C und R

$$\frac{i(t_{\text{Max } 1})}{i(t_{\text{Max } 2})} = e^{-\delta t_{\text{Max } 1}} / e^{-\delta t_{\text{Max } 2}} = e^{-\delta(t_{\text{Max } 1} - t_{\text{Max } 2})}$$

$$\delta = \frac{1}{t_{\text{Max } 2} - t_{\text{Max } 1}} \ln \left(\frac{i(t_{\text{Max } 1})}{i(t_{\text{Max } 2})} \right)$$

- aperiodischen Grenz- und periodischen Fall Punkte $u_C(t \rightarrow \infty)$ oder $u_C(t=0)$
- Maxima der Kurven

$$\left. \frac{d}{dt} i(t) \right|_{t_{\text{Max}}} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \right) \right|_{t_{\text{Max}}} = \frac{U_0}{L} \left(e^{-\delta t_{\text{Max}}} + t_{\text{Max}} (-\delta) e^{-\delta t_{\text{Max}}} \right) = 0$$

$$\rightarrow \delta t_{\text{Max}} = 1 \rightarrow \delta = \omega_0 = 1/t_{\text{Max}} \quad \text{und} \quad i(t_{\text{Max}}) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\delta e}$$

→ U_0 , δ und ω_0 sowie anschließend ω_e , L, C und R

Beim aperiodischen Fall → da **Maxima recht flach**
Strom bei t_{Max} Maximum, **Spannung** an der Spule wird bei $2t_{\text{Max}}$ maximal

$$i(t_{\text{Max}}) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\omega_0} e^{-\delta t_{\text{Max}}} \quad \text{und} \quad i(2t_{\text{Max}}) = 2 \left(i(t_{\text{Max}}) \right)^2 \frac{R}{2U_0}$$

$$\text{sowie} \quad u_L(2t_{\text{Max}}) = -U_0 e^{-\delta 2t_{\text{Max}}}$$

→ δ und R , danach L , ω_0 sowie anschließend ω_e und C

→ **alle Parameter ausschließlich aus der Messkurve ermittelbar**

Besondere technische Anwendung → aperiodische Grenzfall

Bei Anwendungen (**kleines Überschwingen** möglich) → Einstellung $\delta = 0,8 \omega_0$

→ etwas schneller der Endzustand

Systeme zweiter Ordnung (z.B. mit L und C oder mit **Feder und Masse**)
kommen in der Technik vielfältig vor.

Sie werden immer durch **Parameter δ und ω_0 bzw. ω_e** beschrieben

immer muss **Schwingneigung** beherrscht werden → nur durch **Dämpfung**