

Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Technik, Arbeitsprozesse und Berufliche Bildung

**Skript zur Lehrveranstaltung
„Analyse elektrotechnischer Prozesse III“**

Erich Boeck

**Grundlagen zeitveränderlicher Signale,
Analyse von Systemen der Audio- und Videotechnik**

0 Inhaltsverzeichnis

0	Inhaltsverzeichnis.....	3
1	Einleitung zu zeitveränderlichen Signalen.....	4
2	Periodische Signale.....	6
2.1	Schaltungen und Geräte mit sinusförmigen Signalen.....	6
2.1.1	Behandlung mit Hilfe der komplexen Rechnung.....	6
2.1.2	Behandlung mit graphischen Methoden.....	9
2.1.3	Analyse des Frequenzverhaltens wichtiger Schaltungen.....	13
2.1.4	Parameter für elektrische Stromkreise.....	16
2.1.5	Kennwerte und Übungsaufgaben.....	18
2.1.6	Messung des Frequenzgangs eines Schwingkreises.....	20
2.2	Nichtsinusförmige periodische Signale.....	22
2.2.1	Mehrere sinusförmige Quellen.....	22
2.2.2	Behandlung mit Hilfe der Fourierreihe.....	23
2.2.3	Wichtige Testsignale zur Analyse von Schaltungen.....	24
2.2.4	Analyse modulierter Signale.....	25
2.2.5	Kennwerte und Aufgaben.....	29
3	Nichtperiodische Signale.....	32
3.1	Nichtperiodische Signale endlicher Länge.....	32
3.1.1	Behandlung mit der Fouriertransformation.....	32
3.1.2	Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation.....	33
3.1.3	Beispiel: Analyse von DSL- Signalen.....	35
3.1.4	Kennwerte und Aufgaben.....	36
3.2	Schalt- und Übergangsvorgänge.....	37
3.2.1	Behandlung mit Hilfe der Laplacetransformation.....	37
3.2.2	Beispiel: Analyse des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises.....	40
3.2.3	Übertragungsfunktionen von Systemen.....	46
3.2.4	Kennwerte und Aufgaben.....	47
3.2.5	Messung des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises.....	49
4	Ausblick, weitere Transformationen zur Signalanalyse.....	51
5	Projektaufgabe.....	52
6	Literaturverzeichnis.....	53

1 Einleitung zu zeitveränderlichen Signalen

Die Analyse von Signalen und Systemen sowie die Entwicklung ihrer Methoden unterstreichen außerordentlich deutlich die Aussagen über die drei **Besonderheiten** der Elektrotechnik.

Unabhängig von den immer schnelleren Veränderungen der Technologien sind **Vorgänge und Prozesse der Elektrotechnik** grundsätzlich durch

- **Intransparenz**, die nur punktuell durch Messmittel aufgehoben werden kann,
- heute sogar noch stark zunehmende **Komplexität** und
- eine deutliche **Eigendynamik**

gekennzeichnet.

Diese Besonderheiten wurden zu Beginn der AEP I (im 1. Semester) für die Elektrotechnik aber auch die Informatik, die Prozesssteuerung sowie weitere Bereiche (vergleiche [1]) angeführt.

Der Umgang mit diesen Besonderheiten verlangt für die Analyse von Signalen und Systemen auf der einen Seite ein zunehmend **abstrakteres** Vorgehen und auf der anderen eine **Vielzahl von Methoden**. Nur durch dieses „**elektrotechnische Denken**“, das auch nicht durch gute Computerprogramme ersetzt (sondern nur unterstützt) werden kann, wird diese Technik gemeistert und der ihr immanente umfangreiche Gestaltungsspielraum genutzt.

Der Ausgangspunkt zur Behandlung elektrischer Schaltungen mit zeitveränderlichen Signalen sind die Methoden zur Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke (AEP I).

Durch die Strom-Spannungs-Beziehungen an der Kapazität und der Induktivität führt die Behandlung elektrischer Schaltungen (Systeme) bei zeitveränderlichen Strömen und Spannungen (Signalen) zu Differentialgleichungen. Zur Lösung der Differentialgleichungen sind je nach Zeitfunktion verschiedene Methoden erarbeitet worden. Durchgesetzt haben sich insbesondere solche Methoden, die es gestatten, die Behandlung auf die Art und Weise von Gleichstrom und Spannung zurückzuführen.



Abb. 1.1: Schema zur Lösung mittels Transformation

Das Schema zeigt, welche Wege möglich sind; dabei ist auf der blauen Ebene (Bildbereich oder transformierter Bereich) eine Behandlung nach der Art und Weise wie bei Gleichstrom und -spannung durchführbar.

Entsprechend der notwendigen Methoden (Transformationen) ist eine Einteilung der Signale nach ihrem Zeitverlauf erforderlich:

1. **Sonderfall:** periodische Signale
 - a Spezialfall: sinusförmige Signale
 - b andere Fälle: nichtsinusförmige periodische Signale
2. **Sonderfall:** nichtperiodische Signale
 - a Spezialfall: endliche Zeitvorgänge (einmalige Signale, Anfang und Ende sind im Endlichen)
 - b Spezialfall: Zeitvorgänge, die bei t_0 (insbesondere $t_0 = 0$) beginnen (Schaltvorgänge, Übergangsvorgänge)

Es gibt leider keine Methode für beliebige Zeitsignale. In der Praxis haben (fast) alle Signale Anfang und Ende im Endlichen (zumindest alle Nutzsignale). Die **Fälle sind also in gewissem Maße Idealisierungen**, die praktisch erfolgreich angewandt werden können.

Die Grundlagen der Analyse von Signalen und Systemen werden in dieser Lehrveranstaltung entsprechend der Logik des Verständnisses des Gegenstandes vorgestellt. Dabei wird versucht, viele Bezüge zur praktischen Nutzung aufzuzeigen, und diese werden mit Übungsaufgaben sowie einer Projektaufgaben vertieft. Im Vordergrund stehen diesbezüglich die

- Analyse von Signalen für Schaltungen und Geräte der Audio- und Videotechnik sowie die
- Analyse von Prozessen, der Signalübertragung und -verarbeitung.

Mit elektrotechnischen Prozessen bezeichnen wir Vorgänge und Abläufe in Systemen (Elemente, Geräte und Anlagen) einschließlich ihrer Intransparenz, Komplexität und Eigendynamik. Die Lehrveranstaltung ist für Studenten vorgesehen, die solche Prozesse insbesondere analysieren, verstehen und bewerten können müssen.

2 Periodische Signale

2.1 Schaltungen und Geräte mit sinusförmigen Signalen

2.1.1 Behandlung mit Hilfe der komplexen Rechnung

Der Ausgangspunkt zur Behandlung sinusförmiger Signale sind die Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion, ihrer Differentiation und Integration.

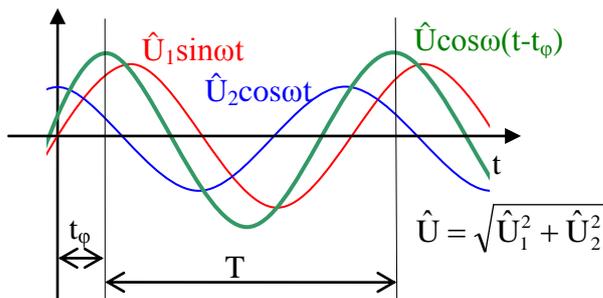


Abb. 2.1: Beispiel für Sinus, Kosinus und ihre Summe

Da jede Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz allgemein durch eine gegenüber dem Nullpunkt verschobenen Kosinusfunktion (genauso Sinusfunktion) dargestellt werden kann, wird in der Elektrotechnik die Kosinusfunktion¹ vereinbart.

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t - \varphi) \quad \left\{ = \hat{U} \sin(\omega t - \varphi + \pi/2) \right\} \quad \text{mit } \varphi = \omega t_\varphi, \quad \omega = 2\pi/T \quad (2.1)$$

Die Differentiation ergibt:

$$\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \omega (-\sin \omega t)$$

Würde die Funktion gleich bleiben, ergäbe sich eine sehr einfache Methode. Das ist der Fall, wenn die **tatsächlich vorhandene** Kosinusfunktion durch eine **imaginäre** Sinusfunktion erweitert wird.

$$\begin{aligned} \cos \omega t + \boxed{j \sin \omega t} &= e^{j\omega t} & \text{mit } j &= \sqrt{-1} \\ \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) &= j\omega e^{j\omega t} \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega} & \text{genauso} \\ \int e^{j\omega t} dt &= \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \quad \text{d.h.} \quad \boxed{\int dt \rightarrow \frac{1}{j\omega}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Anstatt einer Differentiation bzw. Integration würde somit lediglich der **Faktor $j\omega$ bzw. $1/j\omega$ erscheinen**, d.h., es entstehen lineare algebraische Gleichungen wie bei Gleichstrom.

Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit diese Methode entsprechend dem Schema in Abb. 1.1 genutzt werden kann?

- Es müssen lineare Bauelemente vorhanden sein².

¹ Ein weiterer entscheidender Grund liegt bei der in (2.2) notwendigen imaginären Sinusfunktion.

² Nichtlineare Elemente ergeben ohnehin nichtlineare Differentialgleichungen, die im Allgemeinen nur numerisch lösbar sind.

- Die Frequenz wird von linearen Bauelementen und bei linearen mathematischen Operationen nicht verändert, ist somit const.
- Der hinzugefügte Imaginärteil bleibt „separat“ und kann nach der Lösung wieder abgetrennt werden.

Ferner ergibt die Transformation³ der Strom-Spannungs-Beziehungen (vergleiche [2])

$$\begin{aligned} u &= R i && \rightarrow \underline{u} = R \underline{i} \\ u &= \frac{1}{C} \int i dt && \rightarrow \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \underline{i} = j \frac{-1}{\omega C} \underline{i} \quad 4 \\ u &= L \frac{di}{dt} && \rightarrow \underline{u} = j\omega L \underline{i} \end{aligned}$$

(2.3)

die Möglichkeit, Widerstandswerte analog dem Ohm'schen Gesetz zu definieren.

Definition: komplexer Widerstand \underline{Z} und Leitwert \underline{Y}

$$\begin{array}{lll} R = R & X_C = \frac{-1}{\omega C} & X_L = \omega L \\ G = G & B_C = \omega C & B_L = \frac{-1}{\omega L} \quad 5 \\ \underline{Z} = R + j X & \text{bzw.} & \underline{Y} = G + j B \end{array}$$

(2.4)

Damit sind folgende konkrete Lösungsstrategien für sinusförmige Vorgänge möglich:



Abb. 2.2: Schema zur Lösung mittels komplexer Rechnung

Ein Beispiel zeigt die praktische Vorgehensweise und deren Vorteile bei der Rechnung.

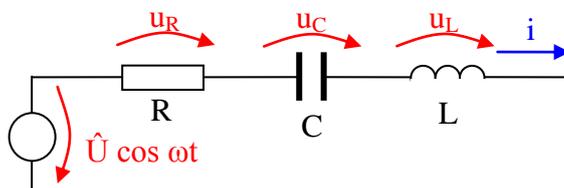


Abb. 2.3: Reihenschaltung von R, C und L mit einer Sinusspannung

1. Schritt: Umwandlung der Schaltung mit (2.4) und für die Spannungsquelle durch Hinzufügen eines imaginären Sinusanteils gleicher Amplitude, Frequenz und Phase

³ Komplexe Größen sollen durch einen Unterstrich gekennzeichnet werden (z.B.: \underline{u} oder \underline{i}).

⁴ Nach Erweitern mit j entsteht im Nenner $j^2 = -1$.

⁵ Bei der Bildung der Beträge fallen die negativen Vorzeichen natürlich weg.

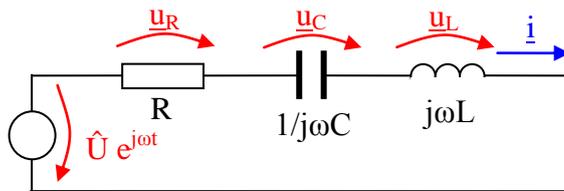


Abb. 2.4: Schaltung im Komplexen für die Reihenschaltung von R, C und L

Wie bei Gleichstromschaltungen wird der Strom nach dem Zusammenfassen der drei Widerstände entsprechend einer Reihenschaltung mit dem Ohm'schen Gesetz berechnet.

$$\underline{i} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + 1/j\omega C + j\omega L}$$

Damit liegt die Lösung im Komplexen bereits vor.

2. Schritt: Umformen in eine Schreibweise, die eine einfache Trennung in Real- und Imaginärteil ermöglicht.

Dazu werden jeweils Zähler und Nenner so umgeformt, dass Realteil und Imaginärteil vorliegen (kartesische Koordinaten). Reine Faktoren und e^{jx} -Funktionen werden belassen, weil sie den nächsten Schritt begünstigen.

$$\underline{i} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} \quad 6$$

3. Schritt: Umformen der kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

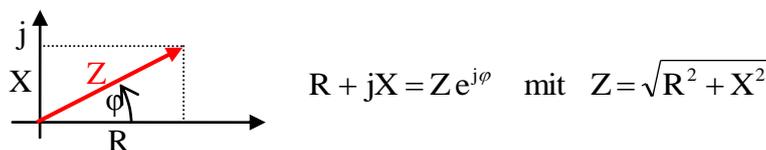


Abb. 2.5: kartesische und Polarkoordinaten

$$\underline{i} = \frac{\hat{U} e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{j\varphi}} \quad \text{mit} \quad \tan\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

4. Schritt: Zusammenfassen aller als Produkte und Quotienten vorhandenen e^{jx} -Funktionen entsprechend der Regeln der Potenzrechnung.

Nach (2.2) kann dann von $e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$ der Realteil durch Weglassen des $j\sin\psi$ bestimmt werden.

$$i(t) = \frac{\hat{U} \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (2.5)$$

Damit liegt die Lösung endgültig vor und es kann nun z.B. untersucht werden, wie sich die Schaltung bei verschiedenen stationären Frequenzen verhält (nicht einer sich zeitlich ändernden Frequenz).

Der Preis für diese einfache Art der Rechnung ist der Umgang mit komplexen Zahlen.

⁶ Der Zähler wird hier belassen, da er bereits dem nächsten Schritt entspricht.

An der Lösung (2.5) ist zu sehen, dass sich weitere Vereinfachungen anbieten. So kann diese in zwei Teile zerlegt werden, von denen einer die **Amplitude** und der andere die **Phasenlage** bestimmt.

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{\hat{U}}{|Z|} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U}{Z}$$

$$\varphi_i = \varphi_u - \varphi_z = \varphi_u - \arctan \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} = -\arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (2.6)$$

Dabei sind I sowie U Effektivwerte ⁷, $Z = |Z|$ und im obigen Beispiel $\varphi_u = 0$. Das lässt sich zu einer **Amplituden- bzw. Betragsrechnung** und einer **Phasenrechnung** verallgemeinern. Um das auch bei komplizierteren Schaltungen zu realisieren, bieten sich die folgenden graphischen Hilfsmittel oder Methoden an.

2.1.2 Behandlung mit graphischen Methoden

In Fortführung der Darstellung in Abb. 2.5 können alle Ströme, Spannungen, Widerstände und Leitwerte als **Zeiger** in einer komplexen Ebene abgebildet werden.

Diese Zeiger sind als Vektoren in der komplexen Ebene aufzufassen. Dafür gilt:

1. In **einer** Ebene können nur **gleiche** Elemente (d.h. Ströme oder Widerstände ...) verarbeitet werden.
2. Die imaginäre und die reelle Achse müssen mit dem gleichen Maßstab eingeteilt werden und haben wegen 1. die gleiche Maßeinheit ⁸.
3. In diesen Ebenen können Zeiger addiert (wie Vektoren) und subtrahiert (Addition des negativen Zeigers) werden.
4. Zwischen den Ebenen kann relativ einfach umgerechnet werden (z.B.: $\underline{Y} = 1 / \underline{Z} \rightarrow Y = 1 / Z$ und $\varphi_Y = -\varphi_Z$ oder $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \rightarrow U = Z \cdot I$ und $\varphi_u = \varphi_z + \varphi_i$).
5. Insbesondere bei Strömen und Spannungen werden die Achsen in der Regel nicht explizit gezeichnet, da ein Wert als Bezugsrichtung gewählt wird und die anderen dann danach ausgerichtet werden.
6. Zum Vergleich der Richtungen ist es sinnvoll, Ebenen exakt übereinander darzustellen. Dabei sollte eine deutliche Kennzeichnung erfolgen.

Für das Beispiel aus Abb. 2.3 und Abb. 2.4 können die Widerstände der Reihenschaltung in einer **Widerstandsebene** (Z-Ebene) addiert werden (Zeiger mit Richtung aneinanderhängen).

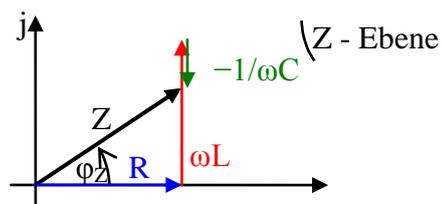


Abb. 2.6: Addition von Widerständen mit Zeigern

⁷ Für Sinusform $I = \hat{I} / \sqrt{2}$ und $U = \hat{U} / \sqrt{2}$ (siehe AEP I).

⁸ Bei ungleicher Maßeinteilung werden Winkel verfälscht.

Aus dieser Zeichnung können Z und φ_Z entweder bei exakter **maßstäblicher Zeichnung durch Messen der Länge von Z und des Winkels φ_Z** ermittelt oder durch die sichtbaren **Verhältnisse im Dreieck mit dem Satz des Pythagoras und einer Winkelfunktion** berechnet werden.

$$Z^2 = R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 \quad \text{und} \quad \tan \varphi_Z = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$$

Nun können I und φ_I berechnet werden ⁹.

$$I = U/Z = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_I = \varphi_u - \varphi_Z = -\arctan \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R} \quad 10$$

Die **Darstellung aller Ströme und Spannungen** kann in diesem Beispiel am einfachsten mit dem Strom als Bezugsrichtung erfolgen. Dabei werden die Ebenen des Stromes und die der Spannungen übereinander gelegt. (Es kann natürlich für beide ein jeweils eigener Maßstab gewählt werden.)

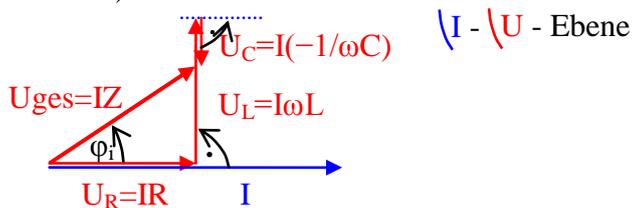


Abb. 2.7: Darstellung des Stromes und der Spannungen als Zeiger

Es ist zu erkennen, dass U_L um 90° gegenüber I vorläuft, dagegen U_C um 90° dem Strom hinterherläuft (im mathematisch positiven Umlaufsinn – gegen den Uhrzeiger).

Bei einer Parallelschaltung von Widerständen addieren sich die Leitwerte, das kann in einer **Leitwertebene** realisiert werden. Treten gemischte Schaltungen auf, wird wie bei Gleichstrom schrittweise berechnet.

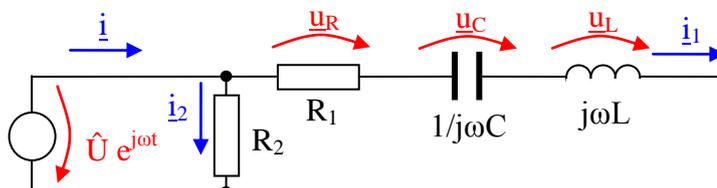


Abb. 2.8: Beispiel: Reihen und Parallelschaltung

Zur Berechnung des komplexen Gesamtwiderstandes von Abb. 2.8 kann in der Z -Ebene begonnen werden. Das ergibt Abb. 2.6. Das Ergebnis wird **in eine Y -Ebene invertiert** (entsprechend $\underline{Y} = 1 / \underline{Z} \rightarrow Y = 1 / Z$ und $\varphi_Y = -\varphi_Z$).

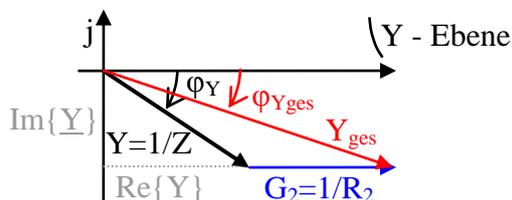


Abb. 2.9 Parallelschaltung in der Y -Ebene

Y_{ges} kann wieder nach den sichtbaren Dreiecksbeziehungen berechnet werden. Dazu bietet sich das Dreieck der Seiten $\text{Im}\{\underline{Y}\}$, $(\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)$ und Y_{ges} an.

⁹ Winkel des Zählers werden addiert und die des Nenners subtrahiert (wegen der Regeln der Potenzrechnung).

¹⁰ Der Strom läuft also der Gesamtspannung hinterher – gegen Uhrzeigersinn gesehen.

$$Y_{ges} = \sqrt{\text{Im}\{\underline{Y}\}^2 + (\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2)^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_{Y_{ges}} = \frac{\text{Im}\{\underline{Y}\}}{\text{Re}\{\underline{Y}\} + G_2}$$

Dabei sind natürlich $\text{Re}\{\underline{Y}\} = \text{Re}\{1/\underline{Z}\} = (1/Z)\cos\varphi_Z$, $\text{Im}\{\underline{Y}\} = \text{Im}\{1/\underline{Z}\} = (1/Z)\sin(-\varphi_Z)$ und $G_2 = 1/R_2$. Somit wird

$$Y_{ges} = \sqrt{\left(\frac{1}{Z}\sin(-\varphi_Z)\right)^2 + \left(\frac{1}{Z}\cos\varphi_Z + \frac{1}{R_2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \tan\varphi_{ges} = \frac{\frac{1}{Z}\sin(-\varphi_Z)}{\frac{1}{Z}\cos\varphi_Z + \frac{1}{R_2}}$$

Man kann weiter umformen¹¹ bis nur noch R_1 , R_2 , ωL und $1/\omega C$ in Y_{ges} enthalten sind.

Soll der Strom bestimmt werden, bietet sich eine Darstellung der Ströme und Spannungen an. Ausgehend von i_1 können alle Spannungen bis zur Gesamtspannung durch Addition konstruiert werden, nach dieser kann dann i_2 und danach i_{ges} ermittelt werden.

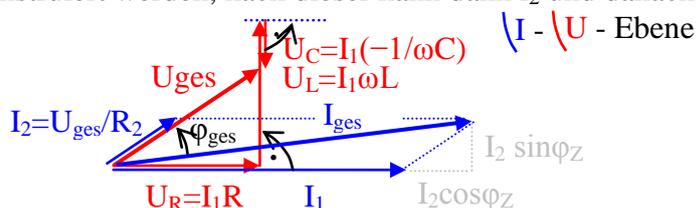


Abb. 2.10: Darstellung der Ströme und der Spannungen als Zeiger

Dafür ergibt sich mit dem Dreieck $(I_1 + I_2\cos\varphi_Z) - I_2\sin\varphi_Z - I_{ges}$ ein Ausdruck entsprechend $I_{ges} = U_{ges} Y_{ges}$ und ein vergleichbarer für φ_{ges} .

Es ist feststellbar, dass auch für kompliziertere Schaltungen Zeigerbilder leicht konstruierbar sind. Eine **Vorgehensweise**, bei der **Zeiger nur addiert** werden (wie in den Beispielen Abb. 2.7 und Abb. 2.10), ist dabei immer vorzuziehen¹². Die **Zerlegung eines Zeigers** in Zeiger gleicher Richtung ist gangbar und für Zeiger, die senkrecht aufeinander stehen, mit dem Thaleskreis durchführbar.

Wenn das **Zeigerbild** nur **zur qualitativen Analyse** benötigt wird, können relativ komplexe Schaltungen schnell untersucht werden. Für eine **quantitative Analyse** entstehen durch die vielfältigen Winkelfunktionen recht schnell Ausdrücke, die bezüglich ihrer Parameter nur noch numerisch ausgewertet werden können (numerische Kurvendarstellung oder sogar mit Simulationsverfahren siehe AEP I). Immer bleibt aber bei **maßstäblicher Zeichnung** die einfache Variante des direkten Messens von Länge und Winkel. (Bei einer durchgängigen komplexen Rechnung besteht das gleiche Problem.)

Eine Erweiterung der Zeigerdarstellung zu **Ortskurven** führt zu einer graphischen Methode, die insbesondere bei der Auswertung von Parametervariationen hilft.

¹¹ Mit $\sin\varphi_Z = \tan\varphi_Z / (1 + \tan^2\varphi_Z)^{1/2}$ und $\cos\varphi_Z = 1 / (1 + \tan^2\varphi_Z)^{1/2}$ sowie durch Einsetzen von $Z = \sqrt{R_1^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$.

¹² Wird dabei mit einem unbekanntem Zeiger begonnen und der bekannte ist die Summe, wird eine Länge angenommen und der Maßstab erst nach dem Ergebnis festgelegt.

Der zu verändernde Parameter kann z.B. ein Widerstand (Potentiometer) sein. Am häufigsten wird die Frequenz (Kreisfrequenz ω) variiert¹³. Das Beispiel aus Abb. 2.4 wird mit einem Potentiometer zu Abb. 2.11.

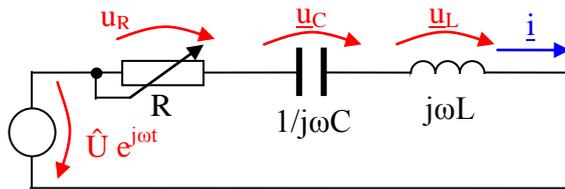


Abb. 2.11: Schaltung für die Reihenschaltung von variablem R sowie C und L

Die graphische Konstruktion erfolgt wie ein Zeigerbild für jeden gewünschten Parameter. Oft ist der Kurvenverlauf nach wenigen Parameterpunkten zu erkennen. Die Ortskurve ist nun die Kurve, die die Spitzen der Ergebniszeiger verbindet. An den entsprechenden Punkten der Kurve sollte der Parameter verzeichnet sein.

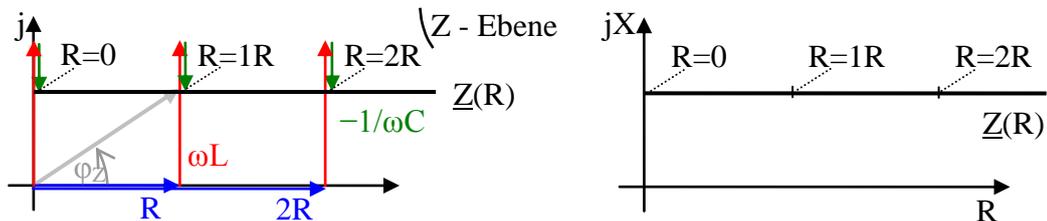


Abb. 2.12: Konstruktion einer Ortskurve und die Ortskurve

Eine Ortskurve kann immer aus der komplexen Ebene herausgeholt und über dem Parameter einmal als Kurve für den Betrag sowie zum anderen als Kurve für die Phase dargestellt werden. Bei einer maßstäblichen Zeichnung erfolgt das wiederum durch Messen von Länge und Winkel. Andernfalls sind die Formeln nach $|Z|(\text{Parameter})$ und $\phi_Z(\text{Parameter})$ umzuformen.

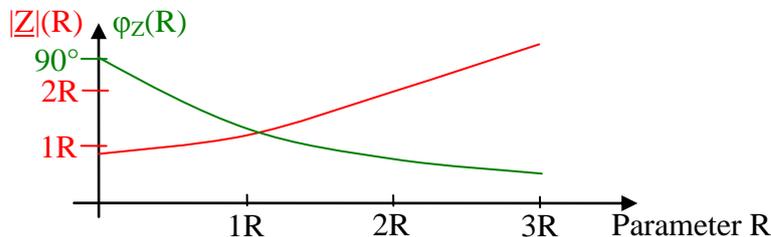


Abb. 2.13: Darstellung von $|Z|(R)$ und $\phi_Z(R)$ über dem Parameter R¹⁴

Die Ortskurven sind aber auch für qualitative Darstellungen sehr gut geeignet. Als Beispiel werden \underline{Z} und \underline{Y} von Abb. 2.4 in Abhängigkeit vom Parameter ω dargestellt.

¹³ Es geht immer um stationäre Prozesse, d.h., nach einer Parameteränderung wird gewartet, bis alle Übergangsvorgänge vorbei sind (siehe auch Abschnitt 3.2).

¹⁴ In der Darstellung entspricht $\omega L - 1/\omega C \approx 0,8 R$.

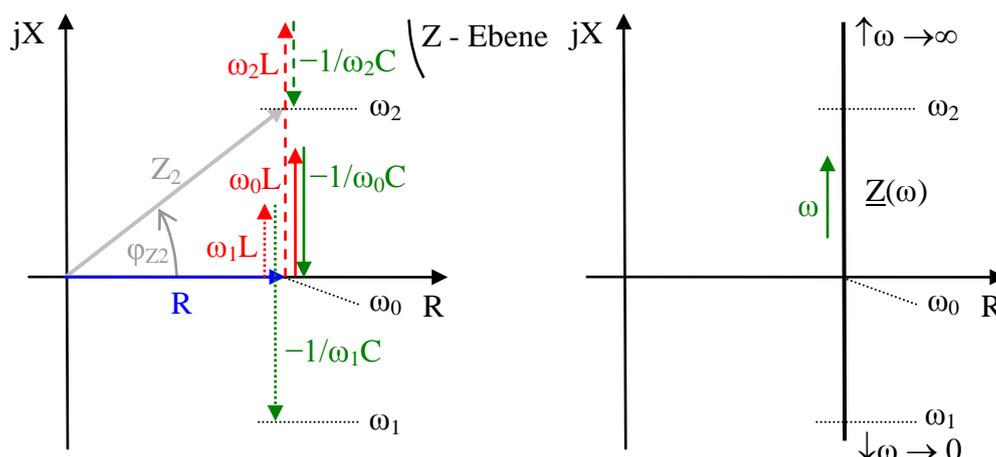


Abb. 2.14: \underline{Z} – Ortskurve der Reihenschaltung von R, L und C als $f(\omega)$

In Abb. 2.14 ist für $\omega = \omega_1$ der Betrag $1/\omega_1 C > \omega_1 L$ und somit hat das Ergebnis von $\underline{Z}(\omega_1)$ einen negativen Imaginärteil. Bei $\omega = \omega_0$ wird der Betrag $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ und $\underline{Z}(\omega_0) = R$ rein reell. Für $\omega = \omega_2$ wird der Betrag $1/\omega_2 C < \omega_2 L$ und $\underline{Z}(\omega_2)$ hat einen positiven Imaginärteil. Die Kurve von $\underline{Z}(\omega)$ ist eine Gerade von $R - j\infty$ (für $\omega = 0$) bis $R + j\infty$ (für $\omega = \infty$).

Bei der **Invertierung der Ortskurve $\underline{Z}(\omega)$ zu einer Ortskurve $\underline{Y}(\omega)$** sind folgende Regeln sehr hilfreich (analog bei Invertierung in umgekehrter Richtung):

1. Durch $Y = 1/Z$ wird der längste Zeiger zum kürzesten und umgekehrt.
2. Wegen $\varphi_Y = -\varphi_Z$ erfolgt eine Spiegelung jedes Zeigers an der reellen Achse.
3. Rein reelle Zeiger bleiben reell.
4. Ist eine Kurve ein Kreis, muss auch die invertierte Kurve ein Kreis sein. Dabei sind Geraden lediglich Kreise mit einem Radius von ∞ .¹⁵

Mit diesen Regeln ergibt sich die Ortskurve von $\underline{Y}(\omega)$.

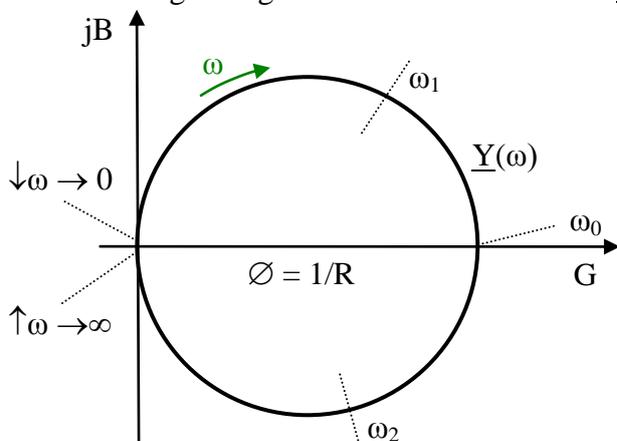


Abb. 2.15: \underline{Y} – Ortskurve der Reihenschaltung von R, L und C als $f(\omega)$

$\underline{Y}(\omega)$ ist ein Kreis mit dem Durchmesser $1/R$ als größter Zeiger bei ω_0 (in Abb. 2.14 war R der kleinste Zeiger). Was in Abb. 2.14 bei negativen Imaginärteilen lag, liegt hier bei positiven.

2.1.3 Analyse des Frequenzverhaltens wichtiger Schaltungen

An den vorigen Abschnitt schließt sich gut die Analyse des Reihenschwingkreises – eine Reihenschaltung von R, L und C an einer konstanten Spannungsquelle nach Abb. 2.4 – an.

¹⁵ Das folgt aus den Gesetzen der Abbildung von Kurven in einer komplexen Ebene.

In den Kurven Abb. 2.14 und Abb. 2.15 sind **drei besondere Parameter (Kurvenpunkte) des Reihenschwingkreises** vorhanden (vergleiche auch [2]).

Diese Parameter befinden sich bei (siehe Abb. 2.16)¹⁶

- dem **Imaginärteil Null** (d.h. $1/\omega_0 C = \omega_0 L$), daraus folgt die **Definition der Resonanzfrequenz**

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} ,$$

(2.7)

- und dem **Betrag des Imaginärteils gleich dem Realteil** (d.h. $|\omega_{\pm 45} L - 1/\omega_{\pm 45} C| = R$), daraus folgen die zwei Punkte ω_{+45} und ω_{-45} (siehe Abb. 2.16).

$$\omega_{\pm 45} = \pm R/2L + \sqrt{(R/2L)^2 + 1/LC} .$$

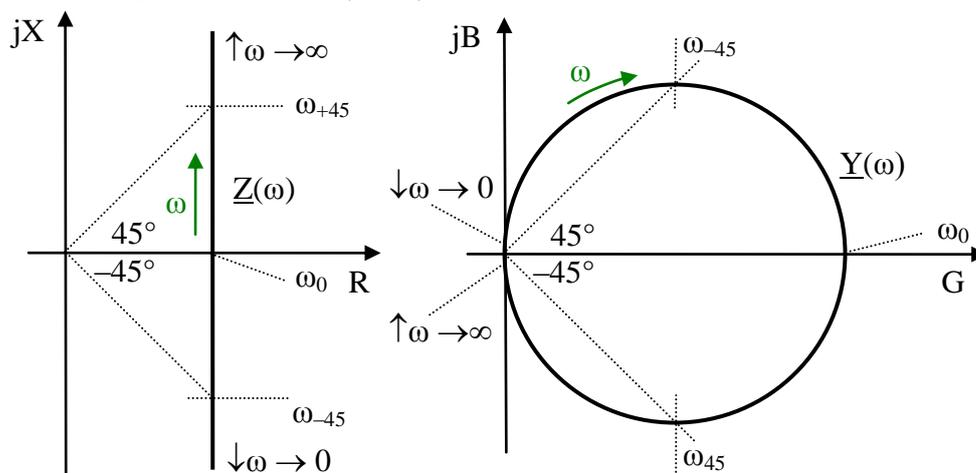


Abb. 2.16: Besondere Parameter der Ortskurven $\underline{Z}(\omega)$ und $\underline{Y}(\omega)$

Aus den beiden Kreisfrequenzen ω_{+45} und ω_{-45} erfolgt die

Definition der Bandbreite des (idealen) Reihenschwingkreises

$$\Delta\omega_B = \omega_{+45} - \omega_{-45} = R/L = \omega_0^2 RC = \omega_0 R \sqrt{C/L} = \omega_0 / Q .$$

(2.8)

Die Definition der Bandbreite in (2.8) ist sinnvoll, weil sie **mehrere interessante Aspekte** erfüllt.

- Betrag des Imaginärteils gleich dem Realteil,
- $Z = \sqrt{2} R$ (bzw. $Y = \sqrt{1/2} \cdot 1/R$) und
- diese $\sqrt{2}$ (bzw. die Verringerung auf $\sqrt{1/2}$) entspricht im logarithmischen Dämpfungsmaß gerade 3 dB. Eine Dämpfung von 3 dB nimmt aber ein normales menschliches Ohr gerade noch nicht wahr.

Der Faktor Q gibt die Güte, Resonanzschärfe oder auch Resonanzüberhöhung an. Verhältnis der induktiven ($\omega_0 L$) oder kapazitiven ($1/\omega_0 C$) Komponente zum Wirkwiderstand R. Danach wird bei Resonanzfrequenz $U_L = U_C = Q U_R$.

Analog zu Abb. 2.13 können aus Abb. 2.16 ein **Frequenzgang** und der **Phasengang** dargestellt werden. Hier sollen $I = U/Z (=UY)$ bezogen auf den Maximalwert bei ω_0 sowie $\varphi_I = \varphi_Y = -\varphi_Z$ abgebildet werden (zusätzlich $U_L = I \omega L$, $U_C = I/\omega C$, $U_R = IR$ und $U_{ges} = U$ bezogen auf U_{ges}).

¹⁶ Für $\underline{Z}(\omega)$ und $\underline{Y}(\omega)$ folgen aus diesen Definitionen die gleichen Kreisfrequenzen.

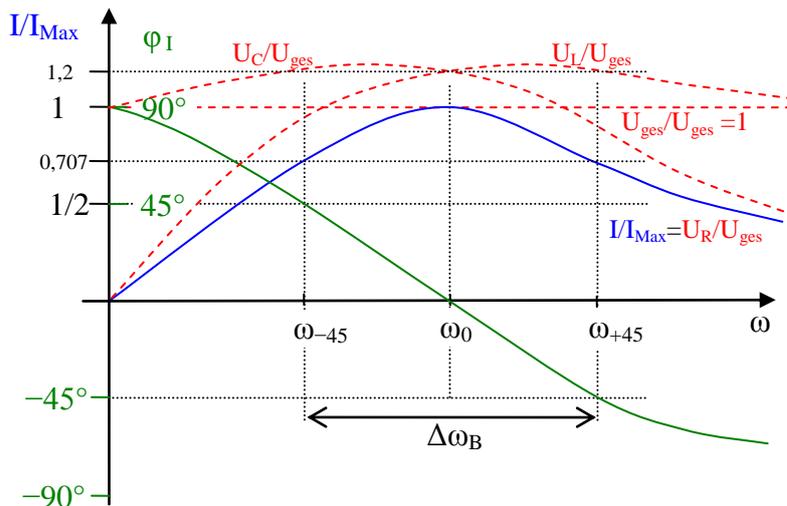


Abb. 2.17: Darstellung von I/I_{Max} und φ_I über Kreisfrequenz ω

Frequenzgang und Phasengang können selbstverständlich auch **messtechnisch** ermittelt und aus diesen beiden **danach die Ortskurve** gezeichnet werden.

In Abb. 2.17 hat $Q = \omega_0/\Delta\omega_B$ einen recht kleinen Wert (ca 1,2). Für einen hohen Wert von Q wäre die Kurve I/I_{Max} sehr viel spitzer ($\Delta\omega_B$ sehr schmal), d.h. hohe Resonanzschärfe und starke Überhöhung von $U_{C\text{Max}}$ und $U_{L\text{Max}}$ gegenüber U_{ges} . Die Spannungen $U_{C\text{Max}}$ und $U_{L\text{Max}}$ sind also größer als die Spannung der Quelle und diese Maxima liegen vor oder hinter ω_0 . (U_C und U_L heben sich zum Teil oder ganz auf.) Die gesamte Spannung fällt bei $\omega = 0$ an C , bei $\omega = \omega_0$ an R ($U_C = -U_L$) und bei $\omega \rightarrow \infty$ an L ab. Alle drei Spannungen ergeben in der Summe immer U .

Weitere wichtige Standardschaltungen (Parallelschwingkreis, Tiefpass und Hochpass) sind in den Übungsaufgaben zu analysieren (siehe Abschnitt 2.1.5).

Hier soll noch ein **Reihenschwingkreis mit realen Verlusten** analysiert werden.

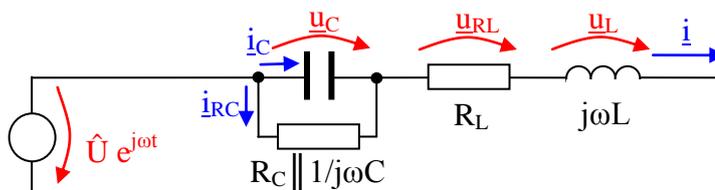


Abb. 2.18: Beispiel: Reihenschwingkreis mit verlustbehafteten Elementen

Zu Beginn wird in einer Y -Ebene die Ortskurve der Parallelschaltung bestimmt.

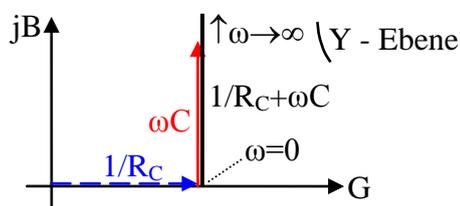


Abb. 2.19: Addition der Leitwerte $1/R_C$ und ωC

Die **halbe Gerade** von $0 \leq B \leq \infty$ ergibt bei der Invertierung in die Z -Ebene einen **Halbkreis**. Der kürzeste Zeiger $1/R_C$ wird zum längsten R_C (Durchmesser des Halbkreises). Wegen $\varphi_Z = -\varphi_Y$ liegt der Halbkreis nach unten.

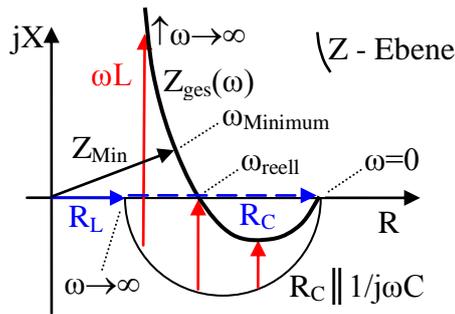


Abb. 2.20: Addition der Widerstände R_L , $R_C \parallel 1/j\omega C$ und ωL

Bei diesem Beispiel wird deutlich, dass ω_0 zu ω_{reell} und $\omega_{Minimum}$ **auseinanderfällt**. Normalerweise ist R_L recht klein und R_C sehr groß, so dass der Halbkreis einen sehr großen Durchmesser hat (der Punkt für $\omega = 0$ befindet sich dann weit rechts außerhalb der Darstellung). Dadurch liegen ω_{reell} und $\omega_{Minimum}$ sehr dicht nebeneinander und die Kurve ist in ihrer Nähe etwa eine Gerade. Infolgedessen sehen auch die Frequenzgänge und der Phasengang (außer in der Nähe von $\omega = 0$) wie in Abb. 2.17 aus. Dieser reale Schwingkreis würde beim Einsatz in einer Oszillatorschaltung (ohne weitere äußere Einflüsse) bei $\omega_{Minimum}$ schwingen (größter Betrag des Stromes mit $I = U/Z_{Min}$).

2.1.4 Parameter für elektrische Stromkreise

Außer dem Verhalten bei verschiedenen Frequenzen sind vor allem die **Leistung** bei sinusförmigen Strömen und Spannungen unterschiedlicher Phase zu untersuchen.

Die Leistung kann zu jedem **Zeitpunkt** $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ berechnet werden (vergleiche AEP I Abschnitt 3.4).

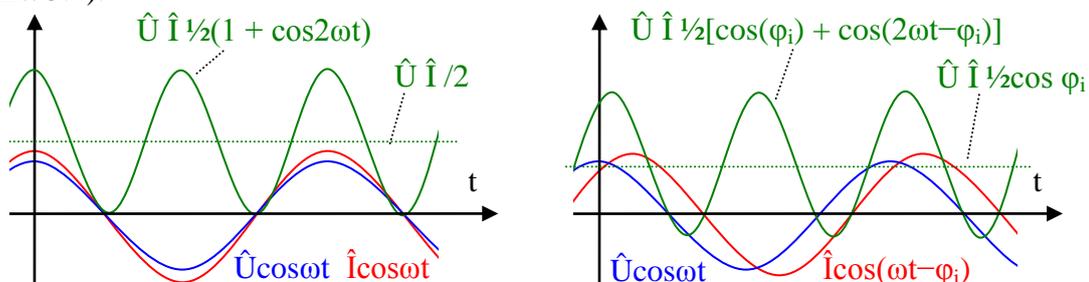


Abb. 2.21: Spannung und Leistung ohne und mit Phasenverschiebung

Mit $u(t) = \hat{U} \cos \omega t$ und $i(t) = \hat{I} \cos \omega t$ wird $p(t) = \hat{U} \hat{I} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$; mit $i(t) = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi_i)$ ergibt sich $p(t) = \hat{U} \hat{I} \frac{1}{2} [\cos\{\varphi_u - (-\varphi_i)\} + \cos\{2\omega t + \varphi_u + (-\varphi_i)\}]$ ¹⁷. Bei $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \pm 90^\circ$ hat die Leistung den Mittelwert Null. Dabei entsprechen eine positive Leistung einer Leistungsaufnahme und eine negative Leistung einer Leistungsabgabe. Es wird also bei $\cos \varphi \neq 1$ ein Teil der Energie während jeder Periode hin- und hergespeichert.

Eine kompaktere und somit **aussagekräftigere Information über den Leistungsverbrauch** ergibt der Mittelwert.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2} \cos \varphi = U I \cos \varphi \quad ^{18} \quad \text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

¹⁷ $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$, in Abb. 2.21 ist $\varphi_u = 0$ und $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ definiert das Vorzeichen von P_B .

¹⁸ $U = \hat{U} / \sqrt{2}$ und $I = \hat{I} / \sqrt{2}$ sind Effektivwerte für die Sinusform (siehe AEP I).

Das entspricht dem Produkt der Spannung mit der Projektion des Stromes auf deren Richtung.

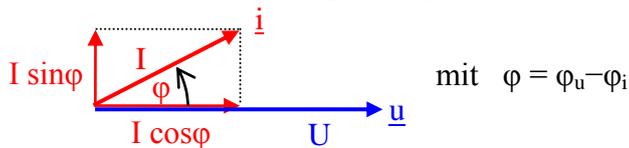


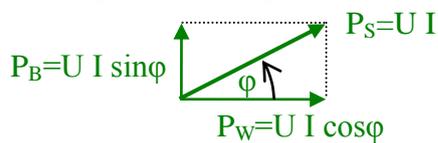
Abb. 2.22: Aufteilung des Stromes parallel und senkrecht zu U

Das Zeigerbild in Abb. 2.22 zeigt, dass bei der Zerlegung des Stromes in zwei Komponenten der Anteil parallel zur Spannung die **Wirkleistung** P_W ergibt und der Anteil senkrecht zur Spannung genau den Teil der Leistung, der während jeder Periode hin- und hergespeichert wird. Dieser Anteil der Leistung wird als **Blindleistung** P_B bezeichnet. Die Summe der Leistungszeiger wird **Scheinleistung** genannt Abb. 2.23. Der Faktor $\cos\varphi$ gibt den Anteil der Wirkleistung an und wird deshalb **Leistungsfaktor** $\cos\varphi$ genannt.

Definition: Wirkleistung, Blindleistung, Scheinleistung und Leistungsfaktor

$$P_W = \bar{P} = U I \cos\varphi \quad P_B = U I \sin\varphi \quad P_S = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = U I \cos\varphi \quad (2.9)$$

Eine Zeigerdarstellung für die drei **Leistungskenngrößen** zeigt Abb. 2.23.



Außerdem sind mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$:

$$P_W = \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

$$P_B = \operatorname{Im}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\}$$

Abb. 2.23: Leistungskenngrößen

Läuft der Strom der Spannung voraus, sind kapazitive Anteile vorhanden und es wird $1 > \cos\varphi \geq 0$. Läuft dagegen die Spannung voraus, sind induktive Anteile vorhanden und es wird $1 > \cos\varphi \geq 0$ ¹⁹. An $\cos\varphi$ ist also die Richtung nicht allein erkennbar.

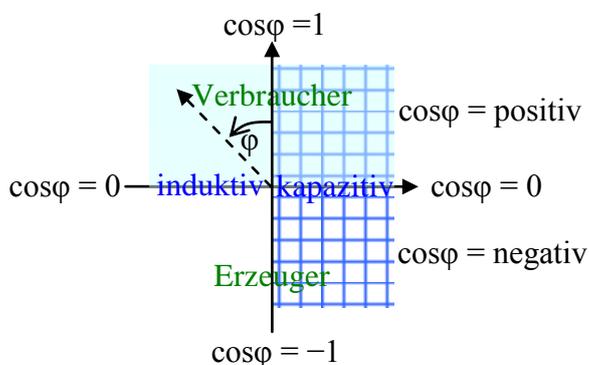


Abb. 2.24: Bedeutung von φ (vom Strom zur Spannung $\varphi_u - \varphi_i$) und von $\cos\varphi$

Alle drei Leistungskenngrößen und $\cos\varphi$ sind **integrale Kennwerte und nur für Sinusform** definiert (2.9), das muss bei entsprechenden Messgeräten beachtet werden. Eine **einfache** Erweiterung auf nichtsinusförmige Größen ist nur für P_W mit \bar{P} gegeben (siehe auch [2])²⁰.

Eine Anwendung auf Dreiphasensysteme ist ohne weiteres möglich und wird in AEP IV behandelt werden.

¹⁹ Da $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$

²⁰ Erweiterung auf nichtsinusförmige periodische Größen siehe [3].

2.1.5 Kennwerte und Übungsaufgaben

Kennwerte sinusförmiger Ströme und Spannungen:

- Spitzenwert \hat{U}, \hat{I} in V, A
- Effektivwert U, I in V, A
- Frequenz f in Hz
- Kreisfrequenz ω in 1/s
- Phasenwinkel (el.) $\varphi = \omega t_\varphi$ in Bogenmaß oder Grad

Kennwerte einiger Grundsaltungen bei sinusförmigen Strömen und Spannungen:

- Tiefpass $\omega_{g0} = 2\pi f_g = 2\pi/\tau = 2\pi/RC$
- Hochpass $\omega_{gu} = 2\pi f_g = 2\pi/\tau = 2\pi L/R$
- Reihenschwingkreis $\omega_0 = 2\pi f_0 = (LC)^{-1/2}$ $\omega_{\pm 45} = 2\pi f_{\pm 45}$ $\Delta\omega_B = 2\pi\Delta f_B = \omega_0/Q_R$
 $Q_R = 1/R\sqrt{C/L}$ der Reihenschaltung
- Parallelschwingkreis $\omega_0 = 2\pi f_0 = (LC)^{-1/2}$ $\omega_{\pm 45} = 2\pi f_{\pm 45}$ $\Delta\omega_B = 2\pi\Delta f_B = \omega_0/Q_P$
 $Q_P = R\sqrt{C/L}$ der Parallelschaltung

Kennwerte für Leistung bei sinusförmigen Strömen und Spannungen:

- Wirkleistung P_W in W
- Blindleistung P_B in var (volt-ampere-reaktiv)
- Scheinleistung P_S in VA
- Leistungsfaktor $\cos\varphi$

Aufgabe 2.1.1

Ein Tiefpass soll für $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $f = 100 \text{ Hz}$ und $U = 5 \text{ V}$ analysiert werden.

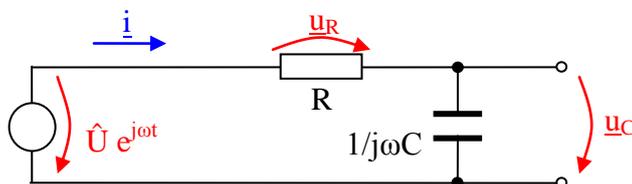


Abb. 2.25: Tiefpass ohne Last

Frage 1: Wie arbeitet diese Schaltung physikalisch?

Frage 2: Wie sieht das maßstäbliche Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?

Frage 3: Wie wären Betrag und Phase von u_C aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?

Frage 4: Wie groß ist die obere Grenzfrequenz f_{g0} ?

Frage 5: Wie sieht die Ortskurve $\underline{u}_C(\omega)$ für $0 \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ aus, wie der Frequenz- und Phasengang von u_C ?

Hinweis: Tabelle für f , ω , U_C und φ_C mit ca. 5 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach f_{g0}).

Zusatzfrage: Wie sieht die Schaltung eines Tiefpasses mit R und L aus?

Aufgabe 2.1.2

Ein Hochpass soll für $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $f = 100 \text{ Hz}$ und $U = 5 \text{ V}$ analysiert werden.

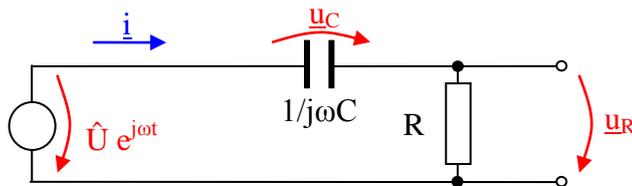


Abb. 2.26: Hochpass ohne Last

- Frage 1: Wie arbeitet diese Schaltung physikalisch?
 Frage 2: Wie sieht ein qualitatives Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?
 Frage 3: Wie sind Betrag und Phase von u_R aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?
 Frage 4: Wie groß ist die untere Grenzfrequenz f_{gu} ?
 Frage 5: Wie sieht die Ortskurve $\underline{U}_R(\omega)$ für $0 \leq f \leq 10$ kHz aus, wie der Frequenz- und Phasengang von u_R ?
 Hinweis: Tabelle für f , ω , U_R und φ_R mit ca. 5 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach f_{gu}).
 Zusatzfrage: Wie sieht die Schaltung eines Hochpasses mit R und L aus?

Aufgabe 2.1.3

Ein Parallelschwingkreis soll für $f = 100$ Hz und $I = 2,5$ mA = const analysiert werden. ($R = 2$ k Ω , $C = 1$ μ F und $L = 40$ mH)

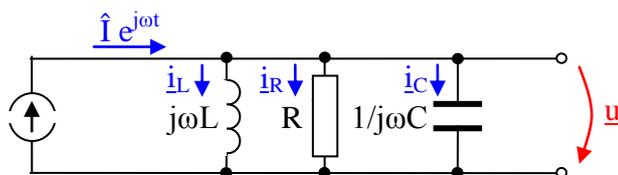
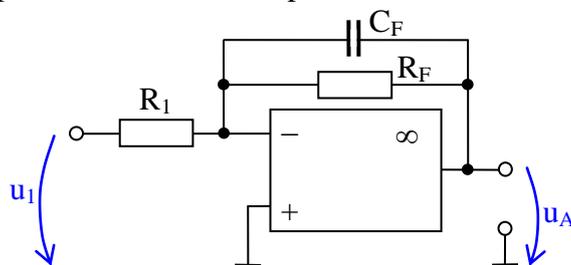


Abb. 2.27: Parallelschwingkreis ohne Last

- Frage 1: Wie sieht das qualitative Zeigerbild aller Ströme und Spannungen aus?
 Frage 2: Wie wären Betrag und Phase von u aus den Dreiecksbeziehungen zu bestimmen?
 Frage 3: Wie groß sind die Resonanzfrequenz f_0 und die Bandbreite Δf_B ?
 Frage 4: Wie sieht die Ortskurve $\underline{U}(\omega)$ für $0 \leq f \leq 10$ kHz aus, wie der Frequenz- und Phasengang von u ?
 Hinweis: Tabelle für f , ω , U und φ_U mit ca. 7 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach f_0 und $f_{\pm 45}$).

Aufgabe 2.1.4

Ein Tiefpass wird mit einem Operationsverstärker aufgebaut.



$$\underline{v}_u = - \frac{R_F \| 1/j\omega C}{R_1}$$

$$\underline{u}_A = \underline{v}_u \underline{u}_E \quad \underline{u}_E = \hat{U} e^{j\omega t}$$

$$U_A = |\underline{v}_u| U_E \quad \varphi_A = \varphi_{vu} + \varphi_E$$

Abb. 2.28: Tiefpass mit Operationsverstärker

- Frage 1: Wie kann C bei $R_1 = 10$ k Ω und $R_F = 100$ k Ω für $f_{go} = 1$ kHz bestimmt werden?
 Frage 2: Wie sehen der Frequenzgang und der Phasengang für $0 \leq f \leq 10$ kHz aus?
 Hinweis: Tabelle für f , ω , U_A und φ_A mit ca. 5 Punkten anlegen (2 vor, 2 nach f_{go}).

Aufgabe 2.1.5

Auf dem Typenschild eines Asynchronmotors sind u.a. folgende Angaben:

Nennspannung : 220/380 V

Nennstrom : 1,6/0,93 A

$\cos\varphi$: 0,78

Leistung : 0,33 W

Frage 1: Wie groß sind die Wirkleistung (elektrisch), Blindleistung, Scheinleistung und der Wirkungsgrad?

Frage 2: Als einfaches Ersatzschaltbild ist die Parallelschaltung von R und L möglich. Wie groß sind diese bei Nennbetrieb?

Frage 3: Welche Größe C muss ein paralleler Kompensationskondensator haben, damit keine Blindleistung aus dem Netz entnommen wird?

Hinweis: Die Leistung ist die nutzbare mechanische Leistung, die Rechnung müsste bei 220 bzw. 380 V im Rahmen der Messgenauigkeit gleiche Ergebnisse liefern. Die Frequenz beträgt $f = 50$ Hz.

2.1.6 Messung des Frequenzgangs eines Schwingkreises

Messen der Spannungen an Widerstand, Induktivität und Kapazität bei verschiedenen Frequenzen.

Versuchsaufbau:

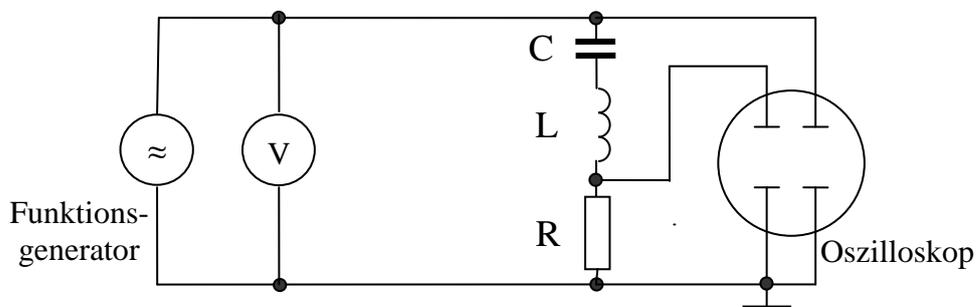


Abb. 2.29: Schaltung des Versuchsaufbaus

Hinweis: Zur Messung R, L und C tauschen. Resonanz- und 45°-Frequenzen suchen und zusätzlich zwei weitere Messpunkte auf jeder Seite anordnen. (Achtung: Phase liegt nur einzeln gegenüber der Gesamtspannung vor.)

Versuchsdurchführung:

Messung der Spannungen mit einem Oszillografen, Nutzung einer Sinusspannung, Übergabe der Kurven an einen PC und Auswertung, Vergleich mit berechneten Verläufen und Parametern.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Messen Sie bei $U = 5 \text{ V}$, $L = 300 \text{ mH}$, $C = 0,22 \text{ }\mu\text{F}$ und $R = 300 \text{ }\Omega$ sowie $30 \text{ }\Omega$. Stellen Sie den Frequenz- und Phasengang doppeltlogarithmisch dar.
2. Stellen Sie die Ortskurve in einer Z-Ebene dar.
3. Bestimmen Sie R, L und C aus den Messwerten.

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Die dargestellten Kurven stimmen mit dem theoretischen Verlauf sehr gut überein.
2. Die aus den Kurven ermittelten Parameter entsprechen recht gut den Werten der eingesetzten Bauelemente. Nur die Induktivität der Spule weicht deutlich vom Typenschild ab. Die eingesetzte Spule (Vorschaltgerät für eine Hochdrucklampe) ist für 50 Hz vorgesehen (Material des Kerns) $\omega_0/2\pi$ ist aber ca. 800 Hz.

2.2 Nichtsinusförmige periodische Signale

2.2.1 Mehrere sinusförmige Quellen

Schon die Addition von zwei sinusförmigen Signalen unterschiedlicher Frequenz ergibt ein nichtsinusförmiges aber periodisches Signal (genauso von mehreren Signalen).

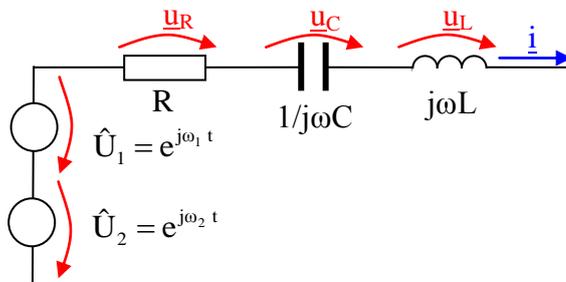


Abb. 2.30: Schaltung mit zwei Quellen unterschiedlicher Frequenz

Da mit der komplexen Rechnung (und den von ihr abgeleiteten Methoden) nur Schaltungen mit linearen Bauelementen behandelt werden können, ist dann auch grundsätzlich die Anwendung des **Überlagerungssatzes** gegeben. Die Schaltung in Abb. 2.30 wird dazu in eine Ersatzschaltung für jede Quelle aufgeteilt.

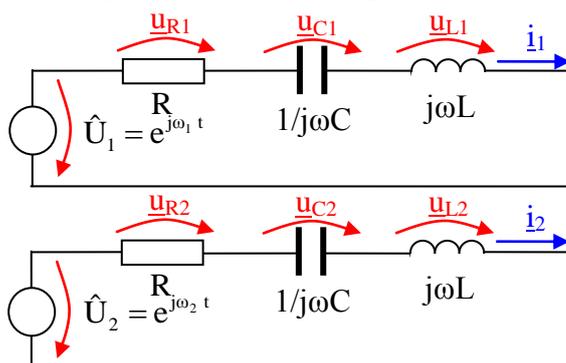


Abb. 2.31: Zwei Schaltungen für den Überlagerungssatz

Beide Schaltungen werden mit Methoden aus Abschnitt 2.1 berechnet. Das Gesamtergebnis ist die **richtungsrichtige Addition** (z.B. der Strom für Abb. 2.30 wird $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$).

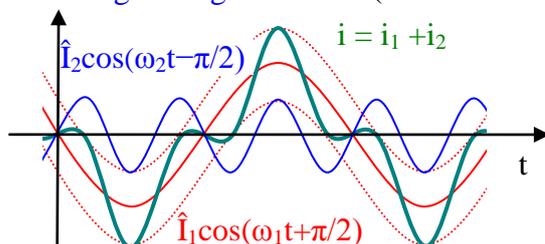


Abb. 2.32: Beispiel für ein mögliches Ergebnis im Zeitbereich ²¹

Bei fast gleichen Frequenzen ergäbe sich für das Beispiel aus Abb. 2.30 ein typischer **Schwebungsvorgang**, der von einer Multiplikation zweier Frequenzen durch deren Phasensprünge unterschieden werden kann.

Mehrere Frequenzen ergeben immer nichtsinusförmige periodische Signale.

²¹ Kleinere Frequenz weit im Kapazitiven ($i \rightarrow 90^\circ$ vor), größere Frequenz weit im Induktiven ($i \rightarrow 90^\circ$ nach)

2.2.2 Behandlung mit Hilfe der Fourierreihe

Alle periodischen Signale können durch Zerlegung in eine **Fourierreihe** zu einer **Summe von Sinussignalen** umgeformt und jeder Summand einzeln (wie in 2.2.1) behandelt werden.

Für die Fourierzerlegung gibt es mehrere Varianten in reeller und komplexer Form. Zur Veranschaulichung soll die bekannteste reelle Form angegeben werden²² (siehe [2]).

$$u(t) = \frac{U_{a0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (U_{ak} \cos(k \omega t) + U_{bk} \sin(k \omega t))$$

mit

$$U_{ak} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\omega t) \cos(k \omega t) d\omega t \quad \text{für } K = 0,1,2,\dots$$

$$U_{bk} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\omega t) \sin(k \omega t) d\omega t \quad \text{für } K = 1,2,\dots$$

(2.10)

Im allgemeinen Fall entstehen **unendlich viele Summanden** U_{ak} und U_{bk} . Alle vorkommenden Frequenzen sind immer genau **ganze Vielfache der Grundfrequenz (Oberschwingungen)**. Für alle wichtigen Signalformen können diese Reihen aus Tafeln entnommen werden (z.B. [4]). **Praktisch** kann immer nach einer **endlichen Anzahl Summanden** abgebrochen werden, schon deshalb, weil alle realisierten Systeme eine endliche Bandbreite haben.

In **Umkehrung** werden gewünschte Signale aus mehreren Sinussignalen zusammengesetzt.

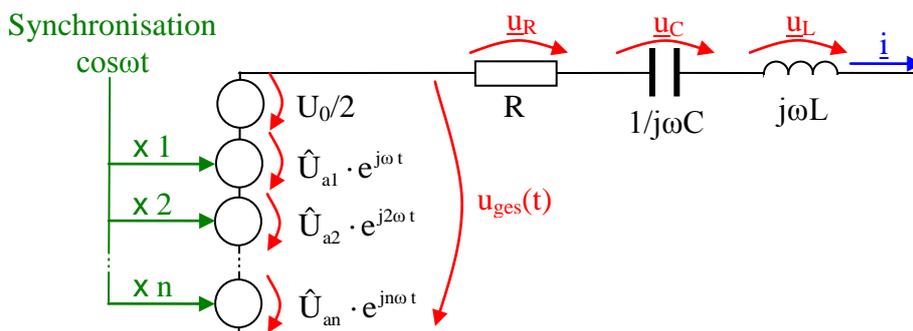


Abb. 2.33: Signal aus vielen Quellen für Oberschwingungen

Da das menschliche Ohr keine Phasenlage wahrnimmt und somit die Synchronisation entfallen kann, wird insbesondere im Audibereich und bei Musikinstrumenten (z.B. Register der Orgel, elektronische Register ...) diese Methode genutzt.

Die **Zeitfunktion** $u(t)$ und die Darstellung des **Frequenzspektrums** (U_{ak} und U_{bk} oder U_{ck} und φ_k z.B. als Balkendiagramme) haben **völlig äquivalente Informationen** über den Vorgang.

Bei der Arbeit mit Spektren lässt sich eine Reihe von Regeln erkennen und nutzen.

1. Symmetrie der Zeitfunktion gegenüber der Achse im Zeitnullpunkt

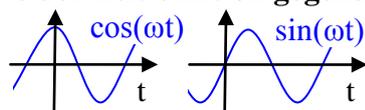


Abb. 2.34: Symmetrie gegenüber der Achse im Zeitnullpunkt

²² Weitere Formen folgen z.B. nach Zusammenfassen von $U_{ak} \cos(k \omega t) + U_{bk} \sin(k \omega t) = U_{ck} \cos(k \omega t + \varphi_k)$ mit $U_{ck} = \sqrt{U_{ak}^2 + U_{bk}^2}$ und $\varphi_k = \arctan(U_{bk} / U_{ak})$ oder von $(U_{ak} + jU_{bk})(\cos(k \omega t) + j\sin(k \omega t)) = U_{ck} e^{jk\omega t}$.

Liegt Spiegelsymmetrie $f(-t) = f(t)$ gegenüber der Achse im Zeitnullpunkt vor, können **nur cos-Funktionen** (also U_{ak}) vorhanden sein (alle $U_{bk}=0$).

Bei Unsymmetrie $f(-t) = -f(t)$ können dagegen nur **sin-Funktionen** (also U_{bk}) vorhanden sein (alle $U_{ak}=0$).

2. Symmetrie der Zeitfunktion bezüglich ihrer Kurvenform

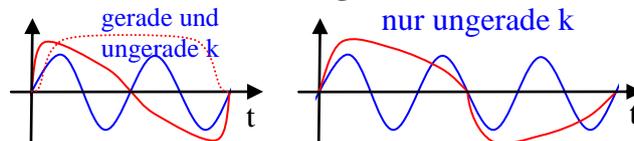


Abb. 2.35: Symmetrie gegenüber der Kurvenform

Gilt für die Kurven $f(-t) = f(t)$ oder $f(-t) = -f(t)$ **und** $f(t+T/2) = -f(t)$ (T Periodendauer), können zusätzlich zu Punkt 1. nur **ungeradzahlige Oberschwingungen** auftreten ($k = 3, 5, 7, 9 \dots$).

3. Es können natürlich beide Fälle kombiniert (addiert) sein und/oder zusätzlich ein Gleichanteil vorhanden sein.

Beide Regeln sind sowohl zur **Kontrolle der Plausibilität von Messungen** unerlässlich als auch zur **Aufwandsreduzierung** bei Berechnungen sehr hilfreich.

2.2.3 Wichtige Testsignale zur Analyse von Schaltungen

Natürlich ist ein **sinusförmiges Signal** das wichtigste Testsignal sowohl bei der messtechnischen Analyse wie bei einer Simulation als auch bei einer analytischen Untersuchung.

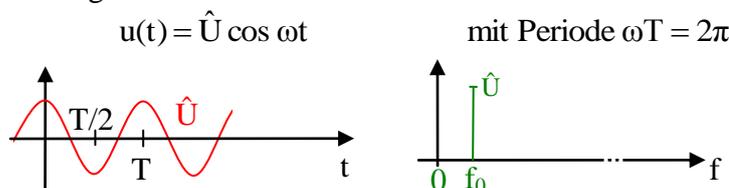


Abb. 2.36: Beispiel für ein sinusförmiges Signal und dessen Spektrum

Ein System wird mit sinusförmigen Signalen des gesamten interessierenden Frequenzbereiches getestet. Die Ergebnisse geben ein umfassendes Bild über die Eigenschaften dieses Systems.

Ein **Rechtecksignal** wird insbesondere eingesetzt, um die Dauer von Anstiegs- und Abfallflanken ($t_{an/ab}$ von $0,1$ bis $0,9 \cdot \hat{U}$) sowie das Überschwingen mit einem Oszilloskop zu analysieren.

$$u(t) = \begin{cases} \hat{U} & \text{für } 0 \leq \omega t \leq \pi \\ 0 & \text{für } \pi \leq \omega t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U}/2 + \frac{2\hat{U}}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

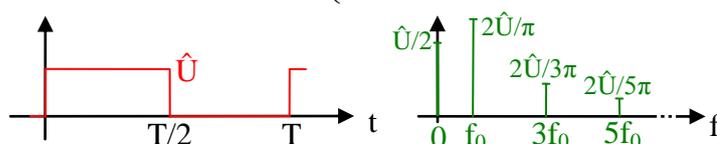


Abb. 2.37: Beispiel für ein Rechtecksignal und dessen Spektrum

Die Anstiegs- und Abfallflanken können auch aus dem Frequenzgang bestimmt werden.

Ein **Dreiecksignal** kann genutzt werden, um die Linearität von Systemen zu analysieren.

Diese gibt es als symmetrisches Dreieck und als „Sägezahn“.

$$u(t) = \hat{U} t/T \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ mit Periode } \omega T = 2\pi$$

$$u(t) = \hat{U} / 2 - \frac{\hat{U}}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

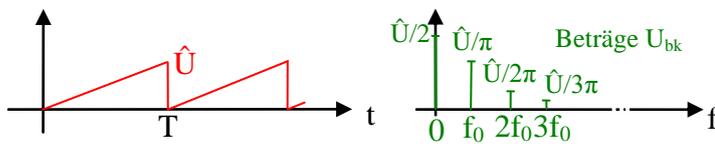


Abb. 2.38: Beispiel für ein Dreieckssignal und dessen Spektrum

Dazu wird eine genügend langsam steigende Flanke genutzt (für vernachlässigbare Übergangseffekte). (Bei nichtlinearen Verzerrungen treten zusätzliche Frequenzen auf, die das Spektrum verändern.)

2.2.4 Analyse modulierter Signale

Ein hochfrequenten Trägersignal kann in seiner **Amplitude** (\hat{U}_{HF}), in seiner **Frequenz** (ω_{HF}) oder in seiner **Phase** (φ_{HF}) moduliert werden. $u_{HF}(t) = \hat{U}_{HF} \sin(\omega_{HF}t + \varphi_{HF})$

Die **Amplitudenmodulation** wurde als Erste genutzt. Sie entsteht durch Multiplikation der Amplitudenhüllkurve mit einer konstanten hochfrequenten Schwingung. Die Amplitudenhüllkurve enthält das niederfrequente Nutzsignal (hier sinusförmiges Testsignal).

$$u(t) = \underbrace{\hat{U} (1 - m \cdot \sin \omega_1 t)}_{\substack{\text{NF Hüllkurve} \\ \text{Amplitude der HF}}} \cdot \underbrace{\sin \omega_2 t}_{\text{HF}} \quad (= \hat{U}(t) \sin \omega_2 t) \tag{2.11}$$

Die Berechnung des **Spektrums** (oder der Fourierreihe) ergibt für (2.11) eine endliche Anzahl Reihenglieder und erfolgt am einfachsten mit den Regeln für trigonometrische Funktionen²³.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega_2 t - \hat{U} \frac{m}{2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t] \tag{2.12}$$

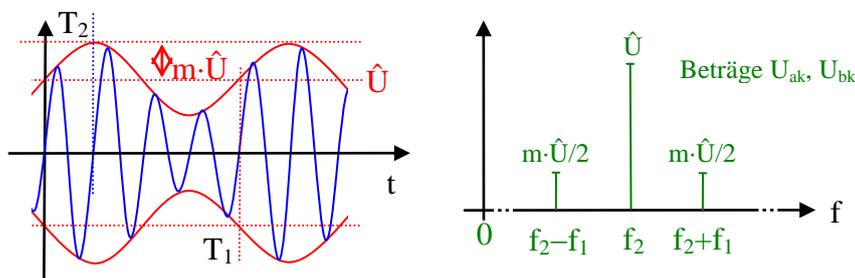


Abb. 2.39: Beispiel für ein amplitudenmoduliertes Signal und dessen Spektrum

Da der **Modulationsgrad** (m) maximal 1,0 werden kann (in der Praxis wird bei guten Modulatoren ca. 0,8 erreicht), wird die Leistung ($P \sim u^2$) der beiden alle Informationen enthaltenden Seitenbänder P_{Nutz} gegenüber der Trägerleistung $P_{Träger}$ zu

$$P_{Nutz} = 2(m\hat{U}/2)^2 = m^2\hat{U}^2/2 < 1/2 \hat{U}^2 = 1/2 P_{Träger} .$$

²³ $\sin x \cdot \sin y = 1/2 [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

Zum anderen kann aus Abb. 2.39 die erforderliche **Bandbreite** z.B. für eine Musikübertragung abgeleitet werden. Soll die Übertragung bis $\omega_{NF} = 2\pi \cdot 15 \text{ kHz}$ (HiFi-Norm) stattfinden, wird zwischen der untersten ($\omega_{HF} - \omega_{NF}$) und der obersten Frequenz ($\omega_{HF} + \omega_{NF}$) die Bandbreite $\Delta\omega_B = 2\omega_{NF} > 2\pi \cdot 30 \text{ kHz}$ (ohne Stereoübertragung). Eine Einseitenbandmodulation mit unterdrücktem Träger kann sowohl das Leistungsverhältnis verbessern als auch die Bandbreite verringern; es muss aber vor der Demodulation beides wiederhergestellt werden.

Bei **Modulation** und **Multiplikation** entstehen neue Frequenzen im Gegensatz zur Addition.

Die **Demodulation** kann bei der Amplitudenmodulation

- entweder durch eine **Gleichrichtung und anschließende Glättung**
- oder durch **nochmalige Multiplikation**²⁴ (Überlagerung) mit $\cos\omega_2 t$ bei (2.12) sowie anschließender Tiefpassfilterung

erfolgen (siehe Abb. 2.40).

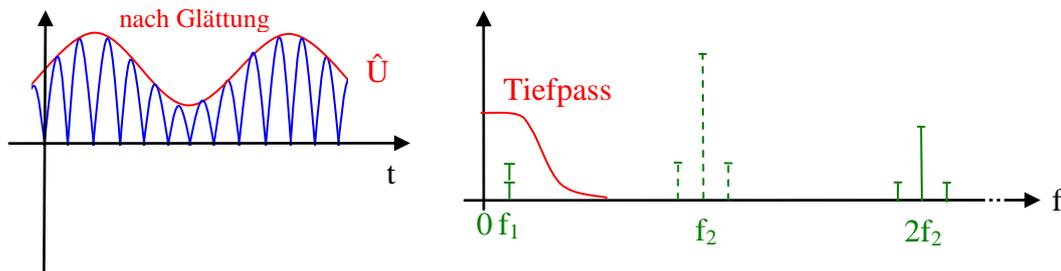


Abb. 2.40: Demodulation Gleichrichtung und Überlagerung

Bei einer Überlagerung entstehen alle Frequenzen mit $+f_2$ und mit $-f_2$. Dabei werden aus $f_2 - f_1$ ein nicht störender Gleichanteil und $\cos[2\pi(f_2 - f_1) - 2\pi f_2] = \cos(2\pi f_1)$; d.h., dieses spiegelt sich zu f_1 dazu²⁵. (Dieses Verfahren wird normalerweise nicht zu einer einfachen Amplitudendemodulation genutzt.)

Das **Überlagerungsverfahren** wird aber allgemein zur **Frequenzumsetzung** angewandt.

Das Prinzip soll am **Überlagerungsempfänger** (Superhet-Empfänger) mit Zwischenfrequenzverstärker dargestellt werden Abb. 2.41.

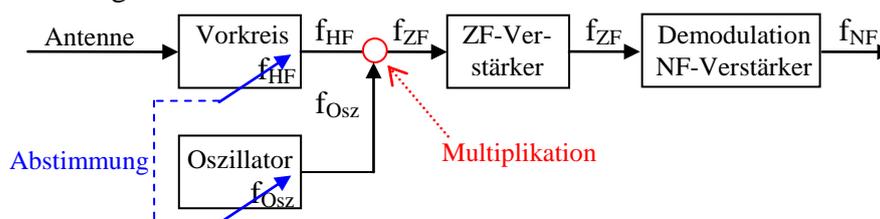


Abb. 2.41: Prinzip des Überlagerungsempfängers

Die Oszillatorfrequenz wird gemeinsam mit der Frequenz des Vorkreises (oder des Empfangsfilters) so abgestimmt, dass entweder $f_{HF} - f_{Osz}$ oder $f_{Osz} - f_{HF}$ immer genau f_{ZF} ergibt. Nach Wahl der Variante muss die andere (die Spiegelfrequenz, z.B. $f_{Osz} + f_{ZF} = f_{HF}$ und $f_{Osz} - f_{ZF} = f_{Spiegel}$) durch den Vorkreis verhindert werden (Spiegelselektion sperrt $f_{Spiegel}$). Das Ergebnis ist

- eine konstante ZF-Frequenz f_{ZF} (unabhängig von der Eingangsfrequenz f_{HF}),
- ein hochwirksamer ZF-Verstärker als Resonanzverstärker mit günstiger Frequenz, Bandbreite und Verstärkung sowie

²⁴ Bei einer reinen Multiplikation haben die Hüllkurven den Gleichanteil Null und es entsteht im Unterschied zur Modulation kein Träger. Dadurch würde sich bei einer einfachen Gleichrichtung die Frequenz verdoppeln. Darüber hinaus entstehen in den Einschnürungspunkten Phasensprünge von 180° . (Siehe auch Fußnote 23).

²⁵ Hierbei spielt die Phase eine Rolle ($\sin x = -\sin(-x)$); Nutzung bei phasenempfindlicher Gleichrichtung.

- viele Filterkreise hintereinander (normalerweise 5 bis 7), um insgesamt eine steile Flanke der Filterung und somit eine hohe Trennschärfe zu erreichen.

Dieses Prinzip brachte den Durchbruch in der Empfangstechnik und wird bis heute angewandt. In modernen Empfängerschaltkreisen sind lediglich die LC-Bandfilter durch PLL-Kreise²⁶ ersetzt worden.

Nach gleichem Prinzip findet auch die Frequenzumsetzung zur Trennung von Bild und Ton beim Fernsehempfang oder die Umsetzung der Signale von Fernsehsatelliten im LNS statt, um danach eine Weiterleitung mit einem Koaxialkabel zu ermöglichen.

Durch **Multiplikation** (Überlagerung) kann somit ein **Frequenzband** in einen fast beliebigen gewünschten anderen Frequenzbereich umgesetzt werden.

Die **Frequenzmodulation** wurde ursprünglich entwickelt, um einen geringeren Bedarf an Bandbreite zu erreichen. Das erwies sich aber als Trugschluss. Liegt die Information in der Frequenz, erhalten wir mit einem sinusförmigen Testsignal ω_S und dem Träger ω_T

$$\omega(t) = \omega_T(1 + m \cdot \cos \omega_S t) = \omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_S t \quad (2.13)$$

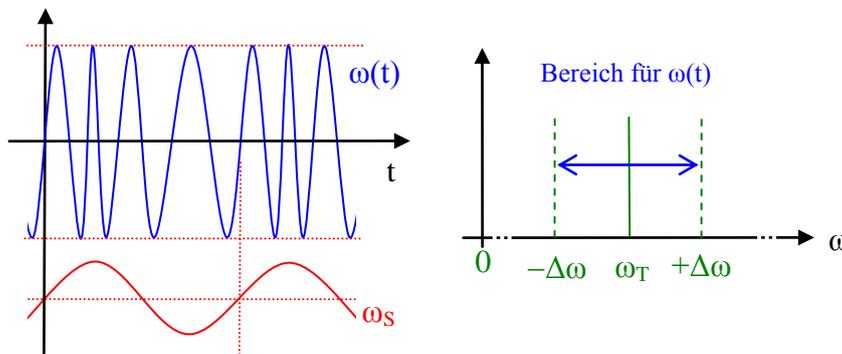


Abb. 2.42: Beispiel für ein frequenzmoduliertes Signal im Zeitbereich

Da in Abb. 2.42 der Bereich von $\omega(t)$ dargestellt ist, entspricht dies nicht dem Spektrum (dieses muss aus zeitunabhängigen Sinusanteilen bestehen).

Um im Signal $u_{HF}(t) = \hat{U}_{HF} \sin(\omega_{HF}t + \varphi_{HF})$ die Information in ω_{HF} zu modulieren, muss davon ausgegangen werden, dass z.B. die Funktion **ursprünglich** „ $\cos \Phi$ “ lautet. Diese wird nur für den Fall, dass $d\Phi/dt = \text{const} = \omega$ ist, zu „ $\cos \omega t$ “. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t \omega(t) dt = \int_0^t (\omega_T + \Delta\omega \cdot \cos \omega_S t) dt \\ \Phi(t) &= \omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_S} \cdot \sin \omega_S t \quad \text{mit } \Delta\varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_S} = \frac{\Delta f}{f_S} \end{aligned}$$

und damit kann das **frequenzmodulierte Signal** geschrieben werden.

$$u(t) = \hat{U}_T \cos\left(\omega_T t + \frac{\Delta\omega}{\omega_S} \cdot \sin \omega_S t\right) \quad (2.14)$$

In (2.14) ist eine **konstante Amplitude** zu erkennen. Der **Phasenhub** $\Delta\varphi$ wird aber gegenüber dem **Frequenzhub** Δf mit f_S dividiert und somit für höhere Signalfrequenzen verkleinert. Das Signal in (2.14) ist für unser Testsignal ein stationäres periodisches Zeitsignal und es kann

²⁶ Phasenregelkreis mit entsprechenden Parametern (Er kann gut als IC realisiert werden.)

²⁷ Nur diese Form von $\omega(t)$ wird unter Frequenzmodulation verstanden $u(t) = \hat{U}_S \cos \omega_S t \rightarrow \omega_T + \Delta\omega \cos \omega_S t = \omega(t)$.

das **Spektrum nach der Fourierreihe** berechnet werden. Die Lösung der Integrale von (2.10) ergibt relativ komplizierte Funktionen.

$$u(t) = \hat{U}_T \left\{ \begin{aligned} &J_0(\Delta\varphi)\cos(\omega_T t) + J_1(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + \omega_S)t - \cos(\omega_T - \omega_S)t] \\ &+ J_2(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 2\omega_S)t + \cos(\omega_T - 2\omega_S)t] \\ &+ J_3(\Delta\varphi)[\cos(\omega_T + 3\omega_S)t - \cos(\omega_T - 3\omega_S)t] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Die Koeffizienten $J_n(\Delta\varphi)$ in (2.15) sind Besselfunktionen n-ter Ordnung 1. Art der Variablen $\Delta\varphi$ (diese können Tabellen entnommen werden).

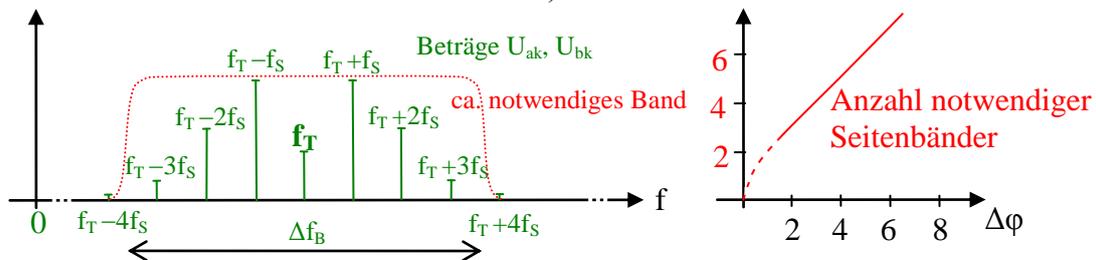


Abb. 2.43: Spektrum der Frequenzmodulation mit einem Testsignal

Wenn alle Seitenbandfrequenzen, die kleiner sind als 10% der Amplitude des unmodulierten Trägers, vernachlässigt werden, wird die **notwendige Bandbreite nach Carson näherungsweise**

$$\Delta f_{B \min} = 2(\Delta\varphi + 1)f_{S \max} \quad \text{für } \Delta\varphi > 1.$$

Danach sind auf jeder Seite des Trägers $\Delta f_{B \min}/2f_{S \max} = \Delta\varphi + 1$ Seitenbandfrequenzen erforderlich (in Abb. 2.43 ist $\Delta\varphi$ ca. 2, somit schon die vierte Seitenbandfrequenz unter 10%).

Für den **UKW Rundfunk** bedeutet dies mit der Festlegung des Frequenzhubs auf $\Delta f = 75$ kHz, dass für HiFi-Qualität mit $f_{S \max} = 15$ kHz der Phasenhub $\Delta\varphi = 5$ und die notwendige Bandbreite 180 kHz (bzw. die Anzahl Seitenbandfrequenzen 6) werden. Bei Beibehaltung von $\Delta\varphi = 5$ und $f_{S \max} = 60$ kHz (Stereo mit RDS) werden nicht ganz 400 kHz benötigt (bei ebenfalls 6 Seitenbandfrequenzen).

Weil $\Delta\varphi = \Delta f/f_S$ ist, würde für hohe Signalfrequenzen bei konstantem Frequenzhub Δf , der die Signalamplitude repräsentiert, die Übertragungsqualität sinken²⁸. Um das zu verhindern, werden die hohen Frequenzen in der Amplitude vor der Modulation verstärkt – **Präemphase**. Das geschieht durch eine Anhebung hoher Frequenzen mittels zusätzlichem RC - Hochpass mit einer Zeitkonstante von $50 \mu s$ (UKW in Europa). Umgekehrt müssen die hohen Frequenzen im Empfänger nach der Demodulation wieder abgesenkt werden – **Deemphase**. Das erfolgt durch einen RC - Tiefpass mit gleicher Zeitkonstante.

Zur **Frequenzmodulation** muss **direkt bei der Schwingungserzeugung** die Frequenz beeinflusst werden. Das geschieht im einfachsten Fall durch ein Kondensatormikrofon oder durch einen spannungsgesteuerten elektronisch realisierten Blindwiderstand. Eine moderne Variante insbesondere für Kleinanwendungen behandelt Aufgabe 2.2.4.

Die **Demodulation** kann bei der Frequenzmodulation nicht so einfach erfolgen. Zuerst sind alle Amplitudenstörungen durch einen **Begrenzer** zu beseitigen (Amplitude hat keine gewollte Information). Danach wird

²⁸ Das Signal - Rausch - Verhältnis ist etwa proportional zu $\Delta\varphi$ und würde deutlich schlechter werden.

- **entweder** durch einen Flanken-, Phasen- (bzw. Verhältnis-) bzw. Zählerdiskriminator **in eine Amplituden-, Phasen- oder Pulsmodulation** gewandelt und mit einem AM-Demodulator (Gleichrichter), phasenempfindlichen Gleichrichter (Verhältnisgleichrichter, Ringmodulator) bzw. nur einen Tiefpass
- **oder aber** in heutiger Zeit durch einen **PLL Demodulator** demoduliert.

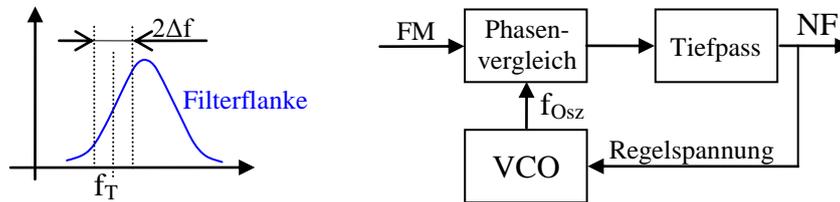


Abb. 2.44: Prinzip des Flankendiskriminators und der PLL-Demodulation

Die Filterkurve in Abb. 2.44 wird so justiert, dass die Flanke die FM in eine AM wandelt. Beim PLL-Kreis (Phasenregelkreis) wird der VCO (spannungsgesteuerter Oszillator) der Frequenz der FM nachgeführt, so dass die Regelspannung exakt dem NF-Signal entspricht²⁹. Diese Anordnung kann sehr gut als integrierte Schaltung realisiert werden.

Die **Phasenmodulation** ist der Frequenzmodulation sehr ähnlich, aber es wird

$$\Phi(t) = \omega_T t + \Delta\varphi \cdot \sin \omega_S t \quad \text{mit} \quad \Delta\varphi = \omega_S \cdot \Delta\omega.$$

Die Amplitudeninformation ($u(t) = \hat{U}_S \sin \omega_S t \rightarrow \Delta\varphi \sin \omega_S t = \Delta\varphi(t)$) steckt hierbei direkt in $\Delta\varphi$. Diese Modulation wird nur in Spezialfällen genutzt.

Insgesamt zeigt sich, dass zwei äquivalente Betrachtungsweisen bzw. Darstellungsweisen für Signale und Systeme – die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung** – bestehen.

2.2.5 Kennwerte und Aufgaben

Kennwerte eines Signals sind stark abhängig von der Signalform z.B.

- Sinussignal: \hat{U} , ω und ev. φ
- Rechtecksignal: \hat{U} , U_{Gleich} (oder \hat{U}_- und \hat{U}_+), Tastverhältnis, Periodendauer und ev. Anstiegszeit der Flanke³⁰
- Dreiecksignal: \hat{U} , U_{Gleich} (oder \hat{U}_- und \hat{U}_+), Anstiegszeit und Abfallzeit (zusammen Periodendauer)

Kennwerte eines Frequenzspektrums (gemessen oder nach der Fourierreihe).

- Amplitudenwerte von $n \cdot \omega$ als U_{ck} (oder die Beträge von U_{ak} und U_{bk})
- Phasenlage von $n \cdot \omega$ als φ_k (oder als Vorzeichen der U_{ak} und U_{bk})

Kennwerte eines amplitudenmodulierten Signals

- Amplitude des unmodulierten Trägers \hat{U}
- Frequenz des Trägers ω_T
- Modulationsgrad $m = \hat{U}_S / \hat{U}_T$
- Bandbreite des modulierten Signals (oder maximale Signalfrequenz)

²⁹ Bei der Regelung gibt es als Regelabweichung eine Phasenabweichung aber keine Frequenzabweichung.

³⁰ von 0,1 bis 0,9 \hat{U}

Kennwerte eines frequenzmodulierten Signals

- Amplitude des Trägers \hat{U}
- Frequenz des unmodulierten Trägers ω_T
- Frequenzhub $\Delta\omega$, daraus folgender Phasenhub $\Delta\phi$
- maximale Signalfrequenz
- Bandbreite des modulierten Signals

Aufgabe 2.2.1

Addition der Teilschwingungen des Rechtecksignals aus Abb. 2.37 z.B. mit einem Simulationsprogramm bei $\hat{U} = 5 \text{ V}$, $T = 2 \text{ ms}$.

Frage 1: Wie sehen die Grund- und die ersten Oberschwingungen ($n = 3, 5, 7$) einzeln aus?

Frage 2: Wie sieht das Signal bei schrittweiser Addition der Oberschwingungen (von der 3. bis zur 7.) aus?

Frage 3: Wie sehen das Amplituden- und das Phasenspektrum aus?

Aufgabe 2.2.2

Spektrum eines amplitudenmodulierten Signals mit $\hat{U}_T = 100 \text{ V}$, $f_T = 500 \text{ kHz}$ und zwei Sinussignalen $\hat{U}_1 = 30 \text{ V}$, $f_{S1} = 80 \text{ Hz}$ und $\hat{U}_2 = 20 \text{ V}$, $f_{S2} = 12000 \text{ Hz}$ (entspricht einem Mittelwellensignal)

Frage 1: Wie sieht die Darstellung des Spektrums der Beträge der Amplituden aus?

Frage 2: Welche Übertragungsbandbreite ist mindestens erforderlich?

Aufgabe 2.2.3

Drei Sprachsignale ($f_M = 200 \dots 3600 \text{ Hz}$) sollen Frequenzmultiplex übertragen werden. Zwischen den Übertragungskanälen ist ein Frequenzabstand von 400 Hz vorzusehen und der erste Kanal soll bei 4 kHz beginnen.

Frage 1: Welche Oszillatorfrequenzen können für eine Frequenzumsetzung gewählt werden?

Frage 2: Es wird eine Multiplikationsschaltung genutzt, welche Frequenzen müssen danach wieder entfernt werden?

Hinweis: Im Vergleich mit einer Amplitudenmodulation soll immer nur ein Seitenband übertragen werden.

Aufgabe 2.2.4

Ein VCO wird zur Frequenzmodulation genutzt. Seine Ausgangsspannung ist konstant 10 V. $U(f_T)$ dient der Feinabstimmung der Trägerfrequenz zu $f_T = 100 \text{ MHz}$. Das NF-Signal ist $\hat{U}_S \cos \omega_{st}$.

Dabei wurde \hat{U}_S so gewählt, dass $\Delta f = 75 \text{ kHz}$ wird. Die Testsignalfrequenz beträgt einmal $f_S = 1 \text{ kHz}$ und zum anderen 10 kHz. Siehe Abb. 2.45.

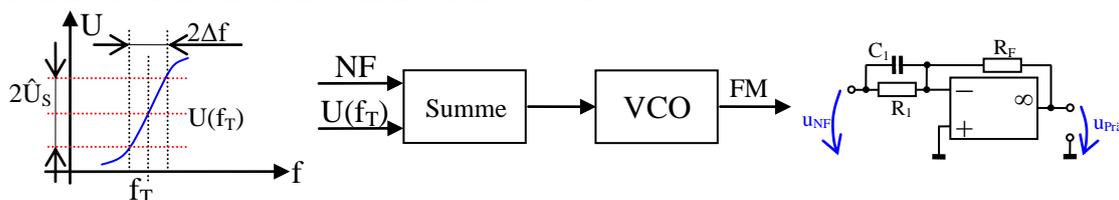


Abb. 2.45: Kennlinie, Blockschaubild eines VCO und Schaltung der Präemphase

Frage 1: Wie lauten $\omega(t)$, $\Delta\varphi$ und $u(t)$?

Frage 2: Um wie viel wird das Signal von 10 kHz durch eine Präemphase ($\tau = C_1 R_1 = 50 \mu\text{s}$) angehoben, wie sieht qualitativ der Frequenzgang aus (bis ca. 20 kHz)?

Hinweis: Z_1 sinkt mit steigender Frequenz und $|v| = R_F/Z_1$ steigt gegenüber $v(f=0) = R_F/R_1$.

Zusatzaufgabe: Simulieren Sie die Anordnung von Abb. 2.45!

3 Nichtperiodische Signale

3.1 Nichtperiodische Signale endlicher Länge

3.1.1 Behandlung mit der Fouriertransformation

Sind nichtperiodische Signale von endlicher Länge, kann mit der **Fouriertransformation** eine Zerlegung in ein kontinuierliches endliches Frequenzspektrum erfolgen.

Die Reihen- wird dabei zu einer Integralform (siehe [2]).

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

mit

31

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos(\omega t) dt \quad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin(\omega t) dt$$

(3.1)

Gilt für das Signal $u(t) = 0$ für $t < t_{\text{Anfang}}$ und $t > t_{\text{Ende}}$, liegt eine endliche Signaldauer vor und die Integrale sind konvergent. Im Unterschied zur Reihe treten **alle Frequenzen** auf (nicht nur ganze Vielfache der Signaldauer $T = t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$). Alle Frequenzen sind stationär im Zeitraum von $-\infty < t < \infty$ vorhanden, heben sich bis t_{Anfang} und nach t_{Ende} gegenseitig völlig auf und ergeben nur während der Signaldauer gerade in ihrer Summe das Signal. Das **Frequenzspektrum ist also zeitkonstant** in Beträgen und Phase. Das ist nicht wie in Abb. 2.33 messtechnisch nachvollziehbar, sondern als rein **mathematischer Bildbereich** aufzufassen.

Auch hier gilt, dass zwei **mathematisch** äquivalente Betrachtungs-/Darstellungsweisen für Signale und Systeme – die **Zeitdarstellung** und die **Frequenzdarstellung** – bestehen.

Alle wichtigen Signale sind in Tabellen aufgeführt. Es gibt **andere Schreibweisen** für die Fouriertransformation (insbesondere komplexe Formen)³². Besonders genutzt werden heute numerische Programme. Durchgesetzt hat sich ein besonders schneller Algorithmus – die FFT (Fast-Fourier-Transformation).

Auch für derartige Signale kann eine Berechnung nach dem **Überlagerungssatz** erfolgen; das Ergebnis stellt aber in der Regel kein Standardsignal dar und muss graphisch ausgewertet werden. Ein Simulationsprogramm ist hier also vorzuziehen.

Die Hauptanwendung liegt in der informationstheoretischen **Signalanalyse**. Dazu sind eine Reihe weiterer Transformationen oder Verfahren entwickelt worden (z.B. die diskrete Fouriertransformation, zeitabhängige Kurzszeitspektren, die Hilberttransformation oder die Korrelationsanalyse), siehe Spezialliteratur z.B. [4].

³¹ Der Faktor $1/\pi$ erscheint in mancher Literatur auch vor den Integralen der unteren Zeile von (3.1). Er ist aber zusammen mit $d\omega$ günstiger platziert.

³² Auch hier können weitere Formen definiert werden z.B. nach Zusammenfassen von

$a(\omega) \cos(k \omega t) + b(\omega) \sin(k \omega t) = c(\omega) \cos(k \omega t + \varphi(\omega))$ mit $c(\omega) = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}$ und $\varphi(\omega) = \arctan(b(\omega) / a(\omega))$ oder von $(a(\omega) + j b(\omega)) (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) = \underline{c}(\omega) e^{j\omega t}$.

3.1.2 Diskrete Signale und diskrete Fouriertransformation

Diskrete Signale haben nur zu diskreten Zeitpunkten t_i einen von Null verschiedenen Wert.

Sie entstehen z.B. durch Messwertabtastung oder A/D-Wandlung. Mathematisch wird dafür die Multiplikation mit einer Folge von Stoßfunktionen³³ genutzt.

$$u(t_i) = u(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_i)$$

Eine Einordnung und ihre Eigenschaften werden in der Gegenüberstellung Abb. 3.1 deutlich.

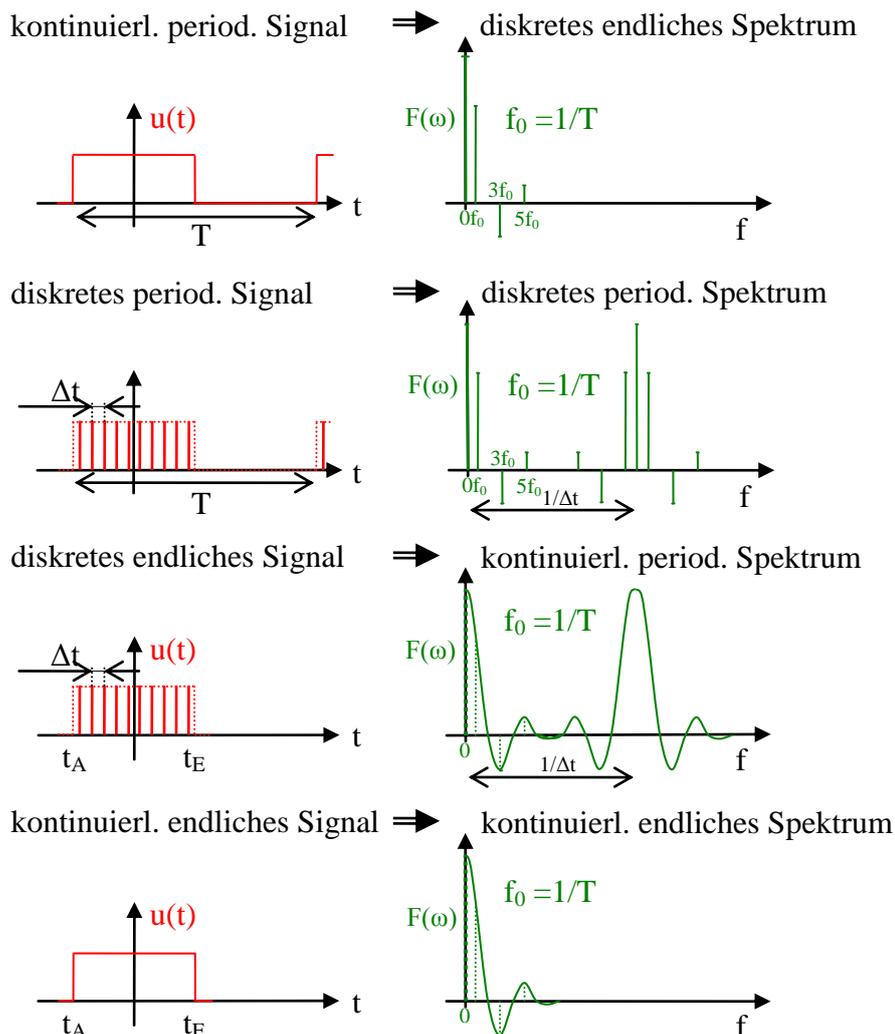


Abb. 3.1: Gegenüberstellung Signale und Spektren³⁴

Die **diskreten periodischen Signale** sind der eigentliche **Gegenstand der diskreten Fouriertransformation (DFT)**. Dabei lassen sich aus den Abtastwerten der Grundperiode des Signals $-T/2 \leq t < T/2$ ³⁵ numerisch direkt die Spektralwerte des Bereiches $0 \leq f \leq 1/\Delta t$ ermitteln. Diese sind dann periodisch fortzusetzen.

³³ Zur Stoßfunktion siehe 3. von (3.5).

³⁴ Es ist $F(\omega) = a(\omega)$ bzw. $\text{Re}\{\underline{U}_{ci}\}$ nach (3.1) bzw. (3.2) (hier ein symmetrisches Rechteck). Ein Unterschied zu (2.10) besteht in $a(0)$ und $a_0/2$. Das kontinuierliche Spektrum des Rechtecks entspricht der $\text{Si}(\omega)$ - Funktion.

³⁵ Es muss exakt die Grundperiode sein.

$$u(t_i) = u_i = \sum_{k=0}^{n-1} \underline{U}_{ck} e^{jk \frac{2\pi i}{n}}$$

$$\text{mit } t_i = i \Delta t \text{ und } T_0 = n \Delta t \text{ also } \omega_0 t_i = 2\pi f_0 t_i = 2\pi i/n \text{ und } f_i = i f_0 = \frac{i}{n \Delta t}$$

$$\underline{F}(f_i) = \underline{U}_{ci} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) e^{-jk \frac{2\pi i}{n}} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

(3.2)

Die in Abb. 3.1 sichtbaren **Eigenschaften** ermöglichen es, die **diskrete Fouriertransformation für weitere Fälle** in guter Näherung zu nutzen.

- So kann das diskrete endliche (einmalige) Signal mit der Einschränkung, dass nur das „abgetastete“ Spektrum des Bereiches $0 \leq f \leq 1/\Delta t$ bei der Berechnung entsteht, bestimmt werden ³⁶.
- Das kontinuierliche periodische Signal kann abgetastet werden ³⁶ und die ermittelten Spektralwerte des Bereiches $0 \leq f \leq 1/2\Delta t$ sind das diskrete endliche (einmalige) Spektrum.
- Das kontinuierliche endliche (einmalige) Signal kann ebenfalls abgetastet werden ³⁶ und die ermittelten Spektralwerte des Bereiches $0 \leq f \leq 1/2\Delta t$ sind dann das abgetastete Spektrum, das periodisch fortzusetzen ist.

In der Regel ist es möglich, das Signal bzw. deren **Grundperiode genau 2^n mal äquidistant abzutasten**. In diesem Fall kann der schnelle Algorithmus der **FFT** und nicht die vollständige Umsetzung der DFT (3.2) benutzt werden ³⁷.

Für die praktische Anwendung müssen einige Bedingungen beachtet werden.

1. Genau eine (oder mehrere) Grundperioden **äquidistant und synchron zur Periode** abtasten. Wenn der Abtastwert direkt zu Beginn des Signals liegt, gehört der gleiche Wert der nächsten Periode nicht mehr dazu (er ist nicht der letzte der ersten Periode). Hilfestellung: Die numerische Berechnung ist so, als ob der abgetastete Bereich immer wieder (periodisch) komplett angehängt wird.
2. Die Abtastung muss so schnell erfolgen, dass $1/\Delta t$ so groß ist, dass die **Perioden des Spektrums nicht ineinander** laufen und so die Grundperiode des Spektrums verfälscht wird (Aliasingfehler) ³⁸. (Bei Abb. 3.1 ist $1/\Delta t$ etwas zu klein gewählt.)
3. Ist die Abtastung nicht nach 1. und 2. erfolgt, müssen durch **Interpolation neue Abtastwerte** bestimmt werden. (Z.B. bei nicht äquidistanter Abtastung, bei nicht synchroner Abtastung oder wenn bei der FFT nicht 2^n Abtastwerte vorliegen.)
4. Ist es nicht möglich, die Abtastung so vorzunehmen (z.B. weil die Grundperiode im Rauschen nicht erkennbar ist), kann eine **geeignete Fensterfunktion** benutzt und die Abtastung dieser zugeordnet werden.
- 5.

Die vier Punkte zeigen, dass bei der praktischen Anwendung der DFT eine gute Vorbereitung der Messung und Sorgfalt erforderlich sind, sonst entstehen unkalkulierbare Fehler.

³⁶ Bei genügend Abtastpunkten ist das entsprechend genau.

³⁷ Dabei werden Symmetrien zur Vereinfachung der numerischen Berechnung von (3.2) genutzt.

³⁸ Das Abtasttheorem ergibt eine gleichlautende Aussage, wenn der höchste Frequenzanteil bekannt ist.

3.1.3 Beispiel: Analyse von DSL- Signalen

Die vielfältigen modernen Anwendungen der DFT/FFT sollen am Beispiel der Realisierung der Modulation bei einer ADSL-Übertragung untersucht werden. In Abb. 3.2 ist der Ausgangspunkt das zu übertragende **Binärsignal**. Dieses wird z.B. in ein Schieberegister

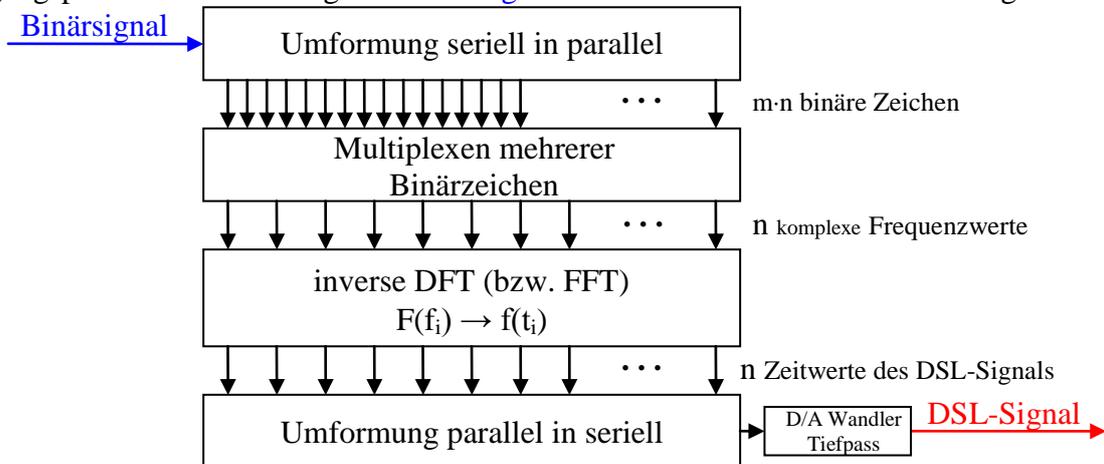


Abb. 3.2: Vereinfachtes Prinzip der Sendemodulation bei ADSL

als Datenpuffer eingelesen und so das serielle in ein **parallel** vorliegendes Signal umgeformt. **Mehrere Binärzeichen** werden durch eine Quadratur Amplituden Modulation (QAM) **zusammengefasst**³⁹ (Multiplexprinzip). Die nun vorliegenden n komplexen Werte werden je einer der parallelen **Übertragungsfrequenzen** der ADSL-Übertragung zugeordnet. Das realisiert die **inverse diskrete Fouriertransformation** (in (3.2) die obere Formel). Die digital vorliegenden n komplexen Werte werden als **Amplituden U_{ck} ($k = 0 \dots n-1$)** der Frequenzen f_i dem Algorithmus zugeführt und die **digitalen Zeitwerte $u(t_i)$** in einen Datenpuffer ausgegeben, **seriell** ausgelesen, **digital- analog gewandelt** und abschließend durch einen **Tiefpass** geglättet. Das so in jedem Umformintervall entstehende Zeitsignal ist das vollständige Signal der **Diskreten-Multiton-Modulation (DMT)** der ADSL-Übertragung mit **256 Frequenzbändern** zu je ca. **4 kHz Bandbreite** (davon 1. bis 32. für analoges Telefon bzw. ISDN freigehalten, 33. bis 64. für die Übertragung des Upstreams, 65. bis 255. für den Downstream und eins für einen Pilotton zur Synchronisation; zusammen ca. 1,1 MHz; siehe Abb. 3.3).

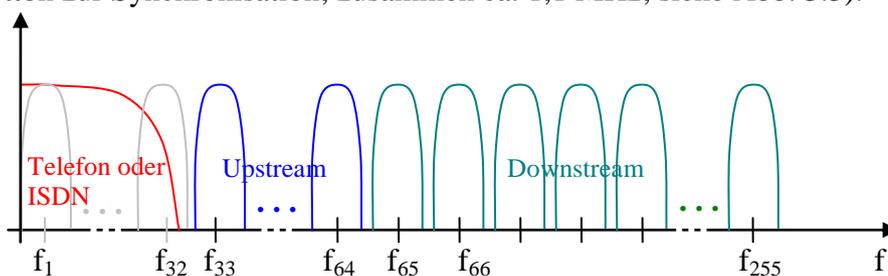


Abb. 3.3: Prinzipielle Anordnung der Frequenzbänder der DMT bei DSL

Die praktische Realisierung erfolgt mit einem **digitalen Signalprozessor (DSP)** und zur Steuerung des Ablaufs einem **Mikrokontroller**, so dass diese Art der Signalverarbeitung mit wenigen integrierten Schaltkreisen im DSL-Modem zu realisieren ist und eben nicht über 200 hochwertige analoge Filter, Oszillatoren und Multiplikatoren zur Frequenzumsetzung benötigt.

³⁹ Z.B. könnte je ein Zeichen dem Real- und dem Imaginärteil des komplexen Wertes (für Betrag und Phase einer Schwingung) zugeordnet werden. Die Verbindung von Amplituden- und Phasenmodulation heißt QAM.

Auf der **Empfangsseite** erfolgt die Demodulation genau andersherum mit der **diskreten Fouriertransformation** (in (3.2) die untere Formel). Die abgetasteten von analogen zu **digitalen Zeitwerten** gewandelten $u(t_k)$ werden zu den **Amplituden $\underline{F}(f_i)$ der Frequenzen f_i** transformiert. Da beide Modems senden und empfangen müssen, findet beides statt, aber mit verschiedenen Up- und Downstreambreiten. Es gibt demnach zwei verschiedene Modems für Provider und Nutzer.

3.1.4 Kennwerte und Aufgaben

Kennwerte bei Nutzung der diskreten Fouriertransformation:

Abtastfrequenz	$1/\Delta t$
Abtastintervall	$n \cdot \Delta t$
Anzahl Abtastwerte	n

Es muss dabei das Abtasttheorem eingehalten werden, damit $1/2\Delta t \geq f_{\max}$ wird und die Perioden im Spektrum sich nicht überlappen (vergleiche Abb. 3.1). Bzw. es muss die Periode der höchsten Frequenz mindestens zweimal abgetastet werden, d.h. $2\Delta t \geq T_{\min} = 1/f_{\max}$.

Aufgabe 3.1.1

Führe Aufgabe 2.2.1 mit der FFT bei $n = 4, 8, 16, 32$ und 512 Abtastwerten durch!

Frage 1: Wie viele Oberschwingungen werden jeweils bestimmt?

Frage 2: Wie ändert sich die Amplitude der jeweils höchsten ermittelten Oberschwingung?

Hinweis: Lege den abgetasteten Wert jeweils in die Mitte von Δt .

Zusatzfrage 1: Wie ändert sich das Spektrum, wenn der erste Wert weggelassen und dafür am Ende ein Wert mehr genutzt wird?

Zusatzfrage 2: Wie ändert sich das Spektrum, wenn die Periode in $n-1$ Intervalle eingeteilt wird und dafür ein Intervall angehängt wird?

3.2 Schalt- und Übergangsvorgänge

3.2.1 Behandlung mit Hilfe der Laplacetransformation

In der Elektrotechnik müssen oft **Übergangsvorgänge** insbesondere beim **Ein- oder Ausschalten** untersucht werden. Das kann entsprechend Abb. 1.1 vereinfacht werden.

Die Konvergenzeigenschaften der Fouriertransformation wurden in der Laplacetransformation durch die Erweiterung der imaginären Kreisfrequenz $j\omega$ mit einem **Dämpfungsanteil** zur komplexen Variablen $p = -\delta + j\omega$ ⁴⁰ so verändert, dass anfangsseitig begrenzte Vorgänge (z.B. $u(t) = 0$ für $t < 0$) transformiert werden können.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} F(p) dp$$

mit $p = -\delta + j\omega$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt$$

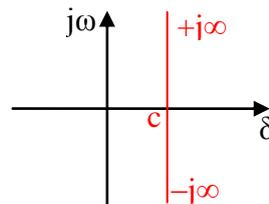


Abb. 3.4: Integrationsweg

(3.3)

Dazu werden in der Literatur mehrere Schreibweisen für die Transformation und die Rücktransformation (inverse Transformation) benutzt.

$$F(p) = L\{f(t)\} \quad \text{oder} \quad F(p) \bullet \text{---} \circ f(t) \quad \text{oder} \quad F(p) \leftrightarrow f(t)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} \quad \text{oder} \quad f(t) \circ \text{---} \bullet F(p) \quad \text{oder} \quad f(t) \leftrightarrow F(p)$$

(3.4)

Mit der **Laplacetransformation** (3.3) können bei $t = 0$ oder t_A beginnende **Signale** (Spannungen, Ströme ...) **transformiert** werden sowie die **Differentiation und Integration zu einfachen algebraischen Operationen** umgeformt werden. Die Nutzung zeigt Abb. 3.5.



Abb. 3.5: Schema zur Lösung mittels Laplacetransformation

Einige **Rechenregeln** verdeutlichen die Eigenschaften der Laplacetransformation.

1. Additionssatz: $L\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 L\{f_1(t)\} + a_2 L\{f_2(t)\}$

2. Integrationssatz: $L\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{p} L\{f(t)\}$

3. Differentiationssatz: $L\left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = p L\{f(t)\} - f(t=0)$

$$L\left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = p^n L\{f(t)\} - p^{n-1} f(t=0) - p^{n-2} f^{(1)}(t=0) \dots - f^{(n-1)}(t=0)$$

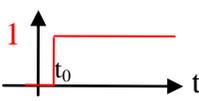
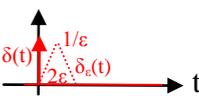
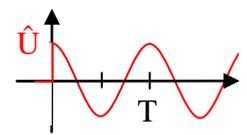
⁴⁰ In der Mathematik und auch einiger anderen Literatur wird s anstatt p (wie in der Elektrotechnik) verwendet.

4. Verschiebungssatz: $L\{f(t-t_0)\} = e^{-t_0 p} L\{f(t)\}$
5. Dämpfungssatz: $L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(p+\alpha)$
6. Faltungssatz: $L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau\right\} = L\{f_1(t)\} \cdot L\{f_2(t)\}$

Bei 3. sind die Anfangsbedingungen $f(t=0)$ in der Praxis oft Null. Das Integral bei 6. ist das **Faltungsintegral**, das auch bei Signalanalyse und -synthese eine wichtige Rolle spielt.

Viele wichtige Funktionen sind mit ihren Laplacetransformierten in **Tabellen** zusammengestellt [5]. Dabei hat man es in der Praxis meist mit **rationalen Funktionen** zu tun. Zur Umformung gegebener Funktionen in die Formen der Funktionen der Tabellen sind obige **Rechenregeln** sowie die **Partialbruchzerlegung** rationaler Funktionen sehr hilfreich. Darüber hinaus steht auch der **Residuensatz** zur Lösung komplexer Wegintegrale zur Verfügung.

Wichtige Signale und Testsignale bei Übergangsvorgängen sind:

1.  **Sprungfunktion:** (Sprich: „Eins von t“)
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t) dt = \frac{1}{p}$$
2.  Verschobene Sprungfunktion:
$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ 1 & \text{für } t > t_0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} 1(t) dt = \frac{1}{p} e^{-pt_0}$$
 ⁴¹
3.  **Stoßfunktion:** mit Definition: **Fläche = 1** (Dreiecksfläche $A_{\Delta} = \frac{1}{2} 2\epsilon \cdot 1/\epsilon = 1$), auch für $\epsilon \rightarrow 0$.
$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \delta(t) dt = 1$$
4.  Bei $t = 0$ beginnender **Kosinus:**
$$\hat{U} \cos \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$
5. Bei $t = 0$ beginnender **Sinus:** $\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6. Bei $t = T/4$ beginnender Sinus:
$$\hat{U} \sin \omega t \cdot 1(t - T/4) = \hat{U} \cos \omega(t - T/4) \cdot 1(t - T/4) \leftrightarrow F(p) = \hat{U} e^{-pT/4} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$
 ⁴²

(3.5) für alle zusammen

Die **Transformation einer Differentialgleichung** erfolgt mit dem Differentiationssatz. Dabei sind die Anfangsbedingungen bei einem „energielosen“ Anfang (z.B. Einschaltvorgang) Null.

Bei „energielosem“ Anfang werden die **Strom-Spannungs-Beziehungen:**

$$u_L = L \frac{di}{dt} \leftrightarrow U_L(p) = L[p I(p) - i(0)] = pL I(p)$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \leftrightarrow I_C(p) = C[p U(p) - u(0)] = pC U(p).$$

Damit können auch **Schaltungen in den Laplacebereich transformiert** werden:

⁴¹ Es wird der Verschiebungssatz genutzt.

⁴² Kurve von 4. insgesamt um $T/4$ nach rechts verschoben. Es wird der Verschiebungssatz genutzt.

Festlegung: Widerstände im Laplacebereich

- R ↔ R
- L ↔ pL
- C ↔ 1/pC

(3.6)

Zur Transformation und Rücktransformation kann die folgende Kurzfassung der **Korrespondenzstabilen** genutzt werden.

f(t) immer mal 1(t)	F(p)	f(t) immer mal 1(t)	F(p)
$\delta(t)$	1	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
1	$\frac{1}{p}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{p}{(p+\alpha)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t}-\alpha te^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t)$	$\frac{1}{p^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$	$\cos(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha} e^{-\beta t} \sin(\alpha t)$	$\frac{1}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t})$	$\frac{p}{(p+\alpha)(p+\beta)}$	$e^{-\beta t} \left(\cos(\alpha t) - \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha t) \right)$	$\frac{p}{(p+\beta)^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}(\alpha-\beta+\beta e^{-\alpha t}-\alpha e^{-\beta t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \left[1-e^{-\beta t} \left(\cos(\alpha t) + \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha t) \right) \right]$	$\frac{1}{p[(p+\beta)^2+\alpha^2]}$

Tabelle 1: Korrespondenzstabelle der Laplacetransformation

Da alle Vorgänge anfangsseitig begrenzt sein müssen, können eigentlich nur Einschaltvorgänge behandelt werden. Für **Ausschalt- und Übergangsvorgänge** erfolgt die Berechnung so, dass zu Beginn des Vorganges durch Quellen (multipliziert mit $1(t-t_{\text{Beginn}})$) der entsprechende Anfangszustand „zwangsweise“ hergestellt wird (damit ist der Differentiationssatz vollständig). Somit müssen dann für L und C die Schaltungen entsprechend Abb. 3.6 genutzt werden.

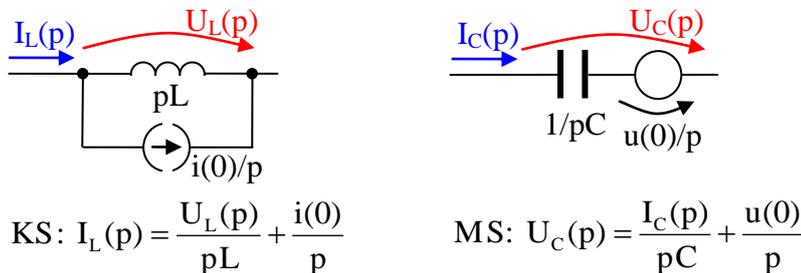


Abb. 3.6: Berücksichtigung von Anfangsbedingungen

In Abb. 3.6 beginnen alle Ströme und Spannungen bei $t = 0$ (das muss bei der Transformation von $I(p)$ und $U(p)$ berücksichtigt werden). Bei $i(0)$ und $u(0)$ ist dies (wegen $1(t) \leftrightarrow 1/p$) schon berücksichtigt. (Beginnen die Vorgänge nicht bei $t = 0$, muss zusätzlich der Dämpfungssatz benutzt werden.) Der Knotenpunkt- und der Maschensatz ergeben in Abb. 3.6 gerade den jeweiligen Differentiationssatz.

3.2.2 Beispiel: Analyse des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises

In AEP I Abschnitt 4.3.3 und 5.2.5 wurden das Ein- und Ausschalten einer RC- und einer RL- Schaltung untersucht. Jetzt können mit akzeptablem Aufwand die Schaltvorgänge an einem Reihenschwingkreis untersucht werden. Dazu wird der Schalter in Abb. 3.7 bei $t = 0$ einmal von unten nach oben und zum anderen von oben nach unten bewegt. Wir gehen von einem idealen Schalter $R_{\text{Ein}} = 0$, $R_{\text{Aus}} = \infty$ und $t_{\text{Schalt}} = 0$ aus⁴³.

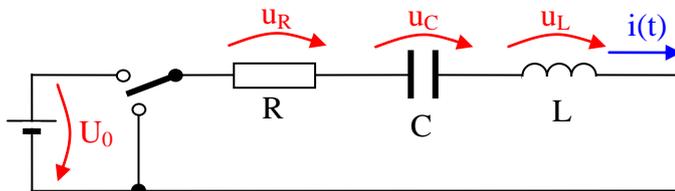


Abb. 3.7: Ein- und Ausschalten einer Reihenschaltung von R, C und L

Die in den Laplacebereich transformierte Schaltung für das **Einschalten** entsteht, wenn für die **Gleichspannungsquelle und den Schalter** eine Quelle $U_0 \cdot 1(t)$ eingesetzt wird.

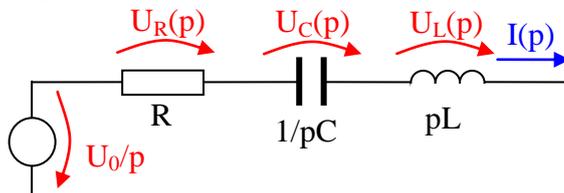


Abb. 3.8: Reihenschaltung von R, C und L im Laplacebereich für das Einschalten

Der Strom folgt sofort aus dem **Ohm'schen Gesetz**:

$$I(p) = \frac{U_0/p}{R + 1/pC + pL} = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + R/2L)^2 + 1/LC - (R/2L)^2}$$

$$I(p) = \frac{U_0/L}{(p + \delta)^2 + \omega_e^2}$$

Die letzte Form entspricht der Korrespondenz in Tabelle 1 (rechte Spalte dritte Zeile von unten) mit der **Dämpfung** $\delta = R/2L$ ($=\beta$) und der **Eigenkreisfrequenz** $\omega_e^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ ($=\alpha^2$)⁴⁴. Dabei sind für ω_e drei Fälle zu unterscheiden:

1. **Periodischer Fall:** $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$
Dieser führt zu einer gedämpften Schwingung mit der Eigenfrequenz ω_e .
2. **Aperiodischer Grenzfall:** $\omega_0^2 - \delta^2 = 0$
Dieser führt zu dem schnellsten Übergangsvorgang ohne Nachschwingen.
3. **Aperiodischer Fall:** $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$
Dieser führt zu einem langen gedämpften Übergangsvorgang (ohne Schwingen).

Für den **periodischen Fall** wird nach Tabelle 1 (rechte Spalte dritte Zeile von unten)

$$i(t) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\omega_e} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t) = \frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t).$$

Das entspricht einer **Sinusschwingung**, die bei $t = 0$ beginnt und deren **Amplitude** $U_0 e^{-\delta t} / \omega_e L$ mit der Zeit **abnimmt**.

Die Spannungen an R, L und C folgen **aus deren Strom-Spannungs-Beziehungen** (3.6)⁴⁵.

⁴³ Das kann durch einen Schalttransistor mit Freilaufdiode realisiert werden.

⁴⁴ ω_0 nach (2.7)

⁴⁵ Die entsprechenden Korrespondenzen sind ebenfalls in Tabelle 1 enthalten.

$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \right) \cdot 1(t)$$

$$u_C(\infty) = U_0$$

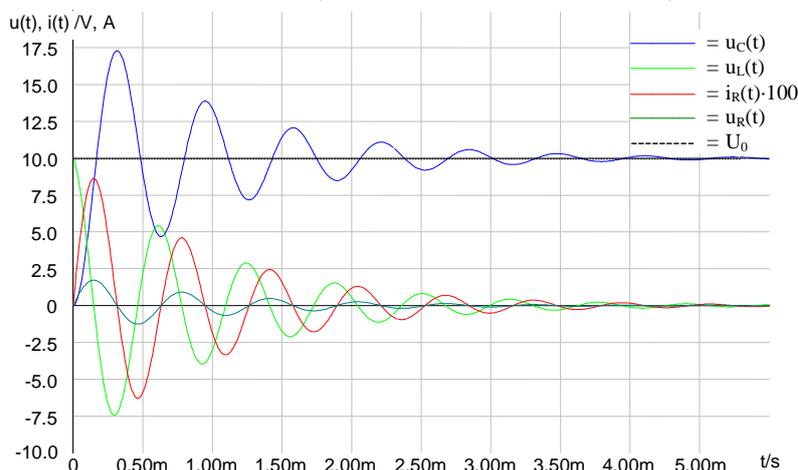


Abb. 3.9: Periodischer Fall $R=20 \Omega$, $C=1 \mu F$, $L=10 \text{ mH}$

Für den **aperiodischer Grenzfall** wird nach Tabelle 1 (rechte Spalte oberste Zeile ⁴⁶)

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t).$$

Das ergibt einen linearen **Anstieg**, der **schnell zu Null abgedämpft** wird.

$$u_R(t) = \frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = U_0 (1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 (1 - (1 + \delta t) e^{-\delta t}) \cdot 1(t)$$

$$u_C(\infty) = U_0$$

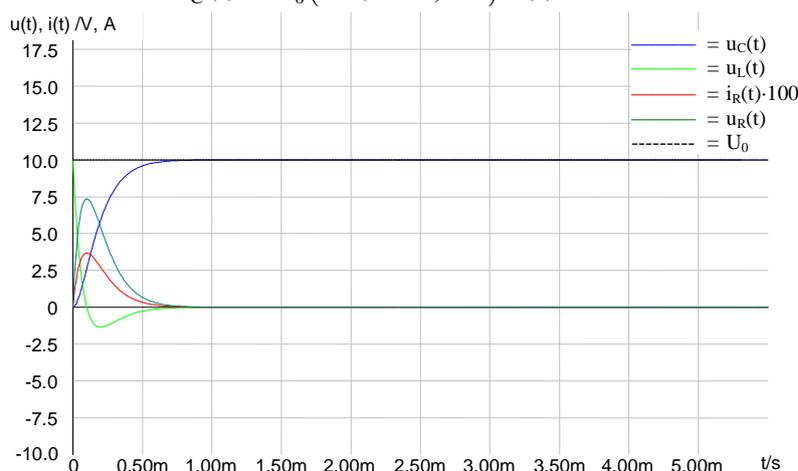


Abb. 3.10: Aperiodischer Grenzfall $R=200 \Omega$, $C=1 \mu F$, $L=10 \text{ mH}$

⁴⁶ Ansonsten müsste der Grenzwert für $\omega_e \rightarrow 0$ von $\sin \omega_e t / \omega_e$ berechnet werden.

Und für den **aperiodischen Fall** wird nach Linearfaktorzerlegung ⁴⁷ die Form entsprechend Tabelle 1 (linke Spalte dritte Zeile von unten) erreicht.

$$I(p) = \frac{U_0/L}{p^2 + pR/L + 1/LC} = \frac{U_0/L}{(p + \delta_1)(p + \delta_2)}$$

$$\text{mit } p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 \rightarrow p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta_{1,2}$$

Danach ergibt sich der Strom zu

$$i(t) = \frac{U_0/L}{\delta_1 - \delta_2} (e^{-\delta_2 t} - e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t) \quad 48.$$

Es ist zu sehen, dass δ_1 relativ klein (**langsamer Vorgang**) dagegen δ_2 relativ groß (**schneller Vorgang**) ist und sich **zu Beginn beide genau aufheben**.

$$u_R(t) = U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t) \quad u_L(0) = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_1 (e^{-\delta_2 t} - 1) - \delta_2 (e^{-\delta_1 t} - 1)] \cdot 1(t) \quad u_C(\infty) = U_0$$

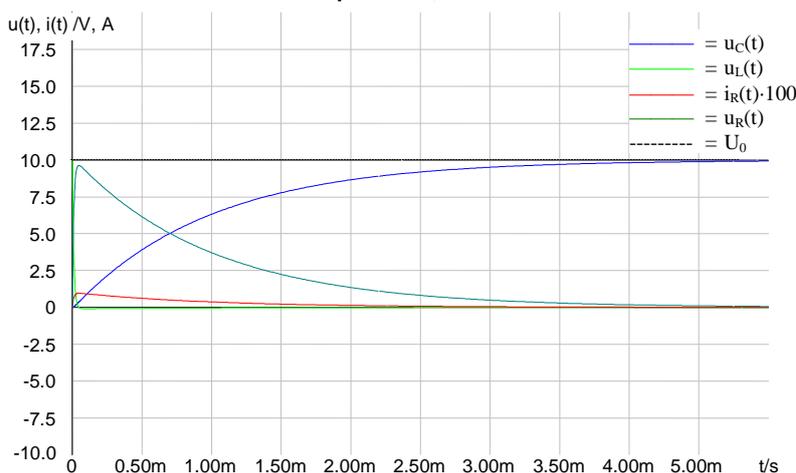


Abb. 3.11: Aperiodischer Fall $R=1000 \Omega$, $C=1 \mu F$, $L=10 \text{ mH}$

In allen drei Fällen fällt die **Spannung U_0** für $t \approx 0$ an L und für $t \rightarrow \infty$ an C ab. Der **Strom** ist sowohl bei $t \approx 0$ (weil L keine schnellen Änderungen zulässt) als auch bei $t \rightarrow \infty$ (weil C keinen Gleichstrom zulässt) Null. Da bei $t = 0$ der **Strom nur beginnt anzusteigen**, kann die **Spannung am Kondensator erst verzögert beginnen**. (Bei Vergrößerung der Kurven ist zu sehen, dass bei $t = 0$ der Spannungsanstieg $du_C/dt = 0$ ist.)

Die in den Laplacebereich transformierte Schaltung für das **Ausschalten** entsteht, wenn für die **Gleichspannungsquelle und den Schalter ein Kurzschluss** eingesetzt wird. Zusätzlich muss der Anfangswert am Kondensator berücksichtigt werden (Abb. 3.6). Der Kondensator wurde durch den **Einschaltvorgang auf U_0 aufgeladen**.

⁴⁷ Ansonsten müsste für ein imaginäres ω_e über $\sin j\omega_e t$ und dessen Exponentialform gewandelt werden.

⁴⁸ $\delta_1 - \delta_2 = -2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Abb. 3.12 ergibt die gleiche Schaltung wie beim Einschalten (Abb. 3.8), nur die **Quelle ist umgepolt**. Außerdem muss $U_C(p) = U_0/p + I(p)/pC$ gerechnet werden (siehe Abb. 3.6).

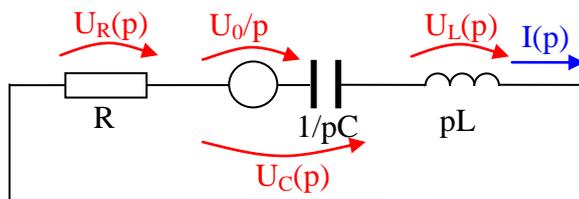


Abb. 3.12: Reihenschaltung von R, C und L im Laplacebereich für das Ausschalten

Da die Rechnung vollkommen gleich erfolgt, werden nur die Ergebnisse angegeben.

Für den **periodischen Fall** werden:

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \cdot 1(t)$$

$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{\omega_e L} e^{-\delta t} \sin \omega_e t \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t - \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_e t + \frac{\delta}{\omega_e} \sin \omega_e t \right) \cdot 1(t)$$

$$u_C(\infty) = 0$$

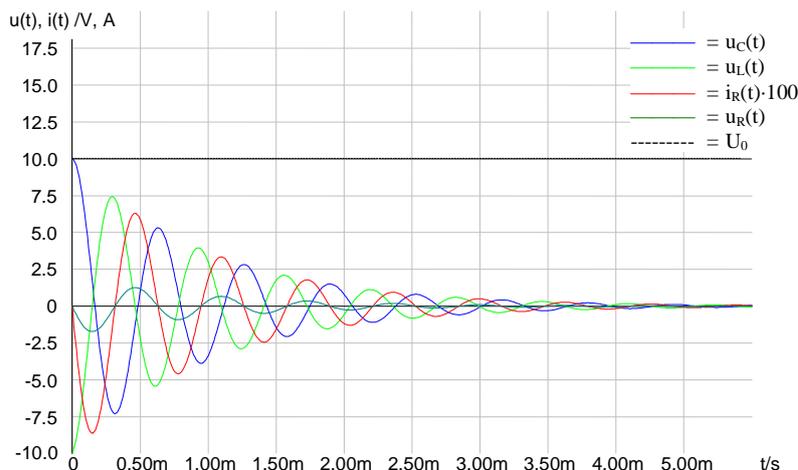


Abb. 3.13: Periodischer Fall $R=20 \Omega$, $C=1 \mu F$, $L=10 \text{ mH}$

Der Strom sowie die Spannungen an R und L beginnen im Negativen. Nach **Abschluss** des Ausschaltvorgangs ist wieder ein **energieloser Zustand** erreicht. Das wird auch bei den beiden anderen Fällen zu sehen sein.

Für den **aperiodischen Grenzfall** wird:

$$i(t) = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_R(t) = -\frac{U_0 R}{L} t e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 (1 - \delta t) e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(t) = U_0 (1 + \delta t) e^{-\delta t} \cdot 1(t)$$

$$u_C(\infty) = 0$$

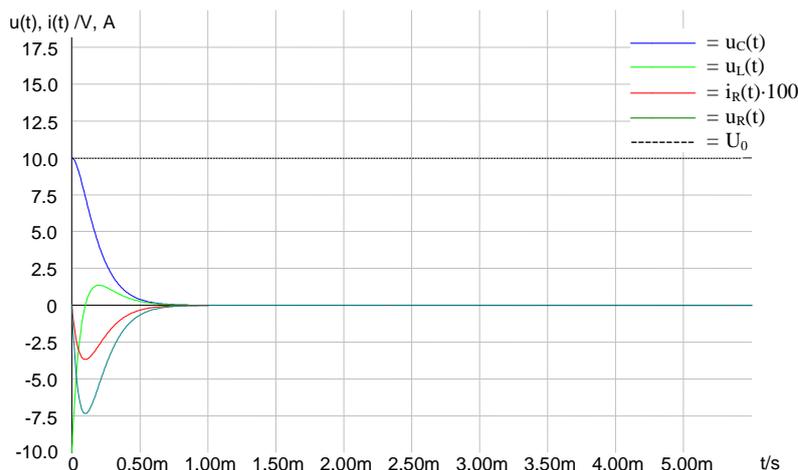


Abb. 3.14: Aperiodischer Grenzfall $R=200 \Omega$, $C=1 \mu\text{F}$, $L=10 \text{ mH}$

Und für den **aperiodischen Fall** wird:

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_R(t) = -U_0 \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}) \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = -U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (\delta_2 e^{-\delta_2 t} - \delta_1 e^{-\delta_1 t}) \cdot 1(t) \quad u_L(0) = -U_0$$

$$u_C(t) = U_0 \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} [\delta_2 e^{-\delta_1 t} - \delta_1 e^{-\delta_2 t}] \cdot 1(t) \quad u_C(\infty) = 0$$

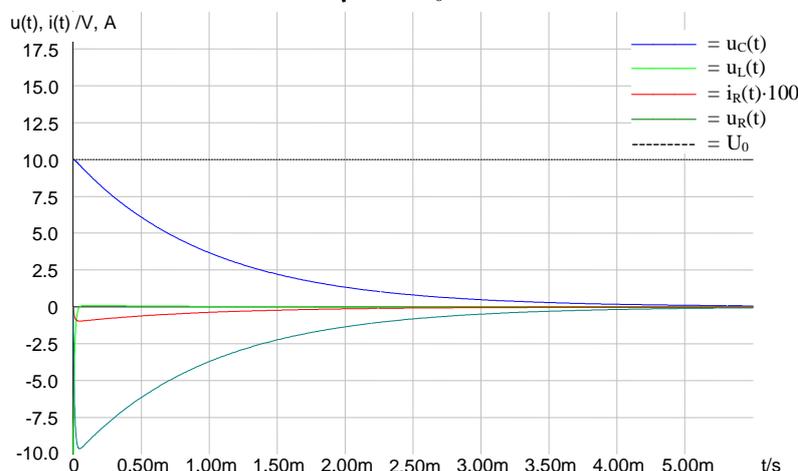


Abb. 3.15: Aperiodischer Fall $R=1000 \Omega$, $C=1 \mu\text{F}$, $L=10 \text{ mH}$

In Abb. 3.15 ist deutlich zu **Beginn der schnelle Anstieg** (δ_2) und danach das **langsame Ausklingen** (δ_1) zu erkennen. Dabei geht u_L etwas ins positive.

Aus den **gemessenen Kurven** können die **Parameter** U_0 , δ und ω_e (bzw. δ_1 und δ_2) bestimmt werden (ω_0 ist damit ebenfalls festgelegt). Heute⁴⁹ ist es sinnvoll mit den **Kursorfunktionen** des Oszilloskops für **drei markante Punkte** der Kurven die Werte u bzw. i und t genau zu

⁴⁹ Früher wurden graphische Methoden mit logarithmischem Papier angewandt.

erfassen. Die Punkte sind günstig zu wählen, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Z.B. könnte in Abb. 3.10 oder Abb. 3.13 $u_C(t \rightarrow \infty)$ oder $u_C(t=0)$ als Punkt zur Bestimmung von U_0 dienen. Vom Strom können die ersten ⁵⁰ beiden Maxima in gleiche Richtung einmal zur Bestimmung von $\omega_e = 2\pi/(t_{\text{Max} 2} - t_{\text{Max} 1})$ genutzt werden. Nach einsetzen von $\omega_e t_{\text{Max} 1} = \pi/2$ des ersten sowie $\omega_e t_{\text{Max} 2} = 2\pi + \pi/2$ ⁵¹ des zweiten Maximums in die Gleichung für den Strom erhalten wir zum anderen δ und können danach ω_0 , L, C und R berechnen.

$$\frac{i(t_{\text{Max} 1})}{i(t_{\text{Max} 2})} = e^{-\delta t_{\text{Max} 1}} / e^{-\delta t_{\text{Max} 2}} = e^{-\delta(t_{\text{Max} 1} - t_{\text{Max} 2})}$$

$$\delta = \frac{1}{t_{\text{Max} 2} - t_{\text{Max} 1}} \ln \left(\frac{i(t_{\text{Max} 1})}{i(t_{\text{Max} 2})} \right)$$

Beim aperiodischen Grenzfall und dem periodischen Fall können ebenfalls die Punkte $u_C(t \rightarrow \infty)$ oder $u_C(t=0)$ und darüber hinaus Maxima der Kurven genutzt werden. Z.B. folgt für den aperiodischen Grenzfall:

$$\left. \frac{d}{dt} i(t) \right|_{t_{\text{Max}}} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \right) \right|_{t_{\text{Max}}} = \frac{U_0}{L} (e^{-\delta t_{\text{Max}}} + t(-\delta)e^{-\delta t_{\text{Max}}}) = 0$$

$$\rightarrow \delta t_{\text{Max}} = 1 \rightarrow \delta = \omega_0 = 1/t_{\text{Max}} \quad \text{und} \quad i(t_{\text{Max}}) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\delta e}$$

Damit können außer U_0 auch δ und ω_0 abgelesen sowie anschließend ω_e , L, C und R berechnen werden.

Beim aperiodischen Fall kann es sehr ungenau werden, wenn die Maxima recht flach verlaufen. So hat der Strom bei t_{Max} ein Maximum und die Spannung an der Spule wird gerade bei $2t_{\text{Max}}$ maximal.

$$i(t_{\text{Max}}) = \frac{U_0}{R} \frac{\delta}{\omega_0} e^{-\delta t_{\text{Max}}} \quad \text{und} \quad i(2 t_{\text{Max}}) = 2 (i(t_{\text{Max}}))^2 \frac{R}{2U_0}$$

sowie $u_L(2 t_{\text{Max}}) = -U_0 e^{-\delta 2t_{\text{Max}}}$

Daraus lässt sich δ und R, danach L, ω_0 sowie anschließend ω_e und C bestimmen.

Somit können alle Parameter ausschließlich aus der Messkurve ermittelt werden.

Eine besondere technische Anwendung hat der aperiodische Grenzfall als schnellster Übergangsvorgang ohne ein Überschwingen. Das ist im Alltag besonders bei Türschließern sichtbar. Bei Anwendungen, für die ein kleines Überschwingen möglich ist, kann mit der Einstellung $\delta = 0,8 \omega_0$ noch etwas schneller der Endzustand erreicht werden (z.B. oft bei Rechtecksignalübertragungen angewandt).

Systeme zweiter Ordnung (z.B. mit L und C oder mit Feder und Masse) kommen in der Technik vielfältig vor. Sie werden immer durch die Parameter δ und ω_0 bzw. ω_e beschrieben und immer muss die Schwingneigung beherrscht werden. Dass ist ausschließlich durch eine entsprechende Dämpfung (in elektrischen Schaltungen nur durch einem Widerstand) möglich. Lediglich bei gewollter Schwingungserzeugung muss die Dämpfung hingegen kompensiert werden (in elektrischen Schaltungen mit aktiven Bauelementen).

⁵⁰ Sie sind am größten und unterscheiden sich am deutlichsten.

⁵¹ Der Sinus wird somit Eins.

3.2.3 Übertragungsfunktionen von Systemen

Alle **realen Signale** beginnen immer zu einer endlichen Zeit und somit kann von einem **energielosen Anfangszustand** ausgegangen werden.

Mit der Laplacetransformation hat sich für **lineare rückwirkungsfreie Vierpole** die Methode der **Übertragungsfunktionen** zur Signal- und Systembeschreibung durchgesetzt.

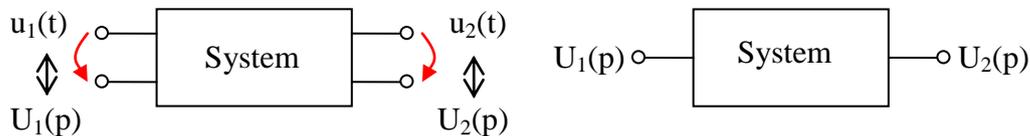


Abb. 3.16: Vierpol und dessen vereinfachte Darstellung

Definition der Übertragungsfunktion

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} \leftrightarrow g(t)$$

(3.7)

Die Übertragungsfunktion beschreibt lineare rückwirkungsfreie ⁵² Systeme vollständig und so ergeben sich die Ausgangssignale direkt aus dem Eingangssignal.

$$U_2(p) = H(p) \cdot U_1(p) \leftrightarrow u_2(t) = g(t) * u_1(t) \\ = \int_0^{\infty} g(t - \tau) u_1(\tau) d\tau$$

(3.8)

In (3.8) steht „ * “ als Symbol für die Faltung mit dem Faltungsintegral und g(t) für die Gewichtsfunktion des Systems. Es ist leicht zu sehen, dass die **einfache Multiplikation** (vergleiche Multiplikationssatz) im Laplacebereich neben den **einfachen Funktionen für die Signale** (vergleiche Tabelle 1) erst den Sinn dieser Methode ausmacht.

Zur **Messung der Übertragungsfunktionen** werden insbesondere die **Sprungfunktion** und wenn technisch genügend genau realisierbar auch die **Stoßfunktion** verwendet. Dabei erfolgt die Bestimmung direkt nach der Definition (3.7). Im Falle der Stoßfunktion ($\delta(t) \leftrightarrow 1$) ist $u_2(t)$ unmittelbar die Gewichtsfunktion g(t) bzw. $U_2(p)$ die Übertragungsfunktion.

Durch einen formalen **Übergang von p zu jω** wird aus der Übertragungsfunktion direkt der **Frequenzgang des Systems** mit Betrag und Phase. Somit ist die Übertragungsfunktion für die Signalverarbeitung eines Systems sehr aussagefähig.

Beispiel: Tiefpass als Vierpol (vergleiche Aufgabe 2.1.4 und Abb. 2.28)

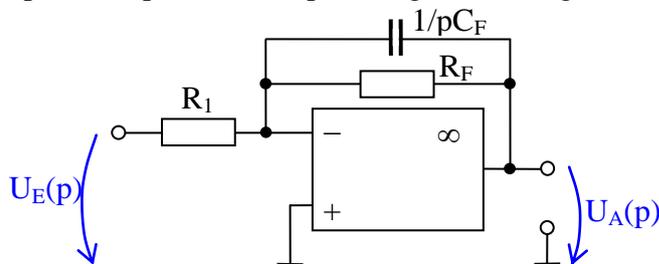


Abb. 3.17: Tiefpass mit Operationsverstärker

$$H(p) = - \frac{R_F \| 1/pC}{R_1} = - \frac{R_F}{R_1} \frac{1/R_F C}{p + 1/R_F C}$$

$$H(p) = v_{u0} \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$$

$$g(t) = v_{u0} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\text{und } F(j\omega) = v_{u0} \frac{\omega_{go}}{j\omega + \omega_{go}}$$

⁵² Rückwirkungsfrei bedeutet, eine Belastung des Ausgangs führt zu keiner Beeinflussung des Systemverhaltens. Das ist z.B. bei Operationsverstärkern die Regel. Notfalls sind Operationsverstärker als Trennverstärker einzusetzen.

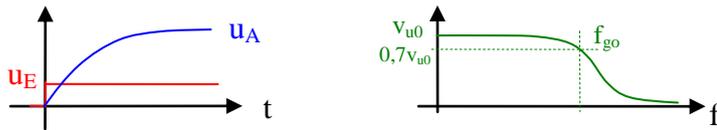


Abb. 3.18: Ein-, Ausgangssignal sowie Betrag des Frequenzgangs von Abb. 3.17

Sehr vorteilhaft ist die Nutzung von Übertragungsfunktionen bei den vorwiegend in der Signalverarbeitung und Regelungstechnik vorkommenden **Kettenschaltungen**.

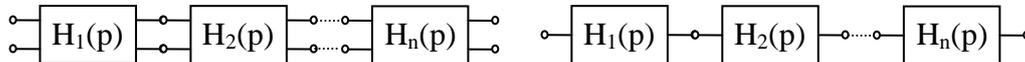


Abb. 3.19: Kettenschaltung von Übertragungsgliedern

Dafür wird:

$$H_{\text{ges}}(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot \dots \cdot H_n(p)$$

Viele **Untersuchungen** insbesondere in der Regelungstechnik sind auch **ohne** eine **Rücktransformation** möglich.

3.2.4 Kennwerte und Aufgaben

Parameter einiger wichtiger **Schwingkreisschaltungen**:

Reihenschwingkreis		$\delta = R/2L$	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$
realer Reihenschwingkreis		$\delta = 1/2CR$	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$
Parallelschwingkreis		$\delta = 1/2CR$	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$
realer Parallelschwingkreis		$\delta = R/2L$	$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$

Einige wichtige **Übertragungsglieder**:

P – Proportionalglied	$u_2 = k u_1$	$\leftrightarrow H(p) = k$
I – Integrierglied	$u_2 = 1/T \int u_1 dt$	$\leftrightarrow H(p) = 1/pT$
D – Differenzierglied	$u_2 = T du_1/dt$	$\leftrightarrow H(p) = pT$
PI – Proportional- + Integrierglied	$u_2 = k (u_1 + 1/T \int u_1 dt)$	$\leftrightarrow H(p) = k(1 + pT)/pT$
pT ₁ – Verzögerungsglied (1. Ordnung)	$T du_2/dt + u_2 = k u_1$	$\leftrightarrow H(p) = k/(1 + pT)$
T _t – Totzeitglied	$u_2 = k u_1(t - T_t)$	$\leftrightarrow H(p) = k \exp\{-pT_t\}$

Aufgabe 3.2.1

In Abb. 3.20 sind zwei Signalverläufe dargestellt.

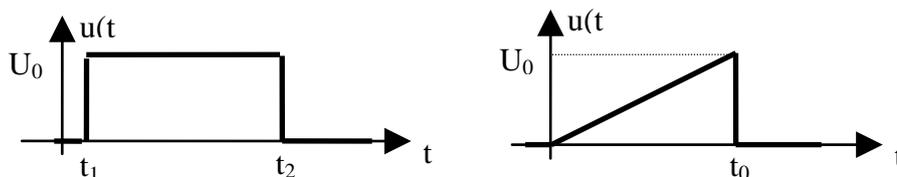


Abb. 3.20: Signalverläufe

Frage: Wie lautet die jeweilige Transformation in den Laplacebereich?

Hinweis: Setzen Sie die Signale durch Addition einfacher Signale zusammen, die zu verschiedenen Zeiten beginnen.

Aufgabe 3.2.2

Ein idealer Parallelschwingkreis wird von einer Stromquelle $I_c \cdot 1(t)$ gespeist.

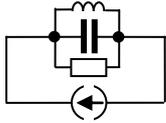


Abb. 3.21: Parallelkreis an einer Stromquelle

Frage: Wie sehen die Spannung und die drei Ströme aus?

Hinweis: Bei Nutzung von Leitwerten sind alle Rechenschritte und Ausdrücke analog dem Reihenschaltkreis mit „vertauschten“ Strömen und Spannungen.

Aufgabe 3.2.3

Gegeben ist eine Kapazität $C = 200 \mu\text{F}$, die auf 500 V aufgeladen ist. Der Wickel der Kapazität stellt eine Reiheninduktivität von $L = 60 \mu\text{H}$ dar.

Frage: Wie groß muss der Reihenwiderstand zur Entladung für den aperiodischen Grenzfall sein?

Aufgabe 3.2.4

Ein Tiefpass 2.Ordnung soll ein Signal glätten.

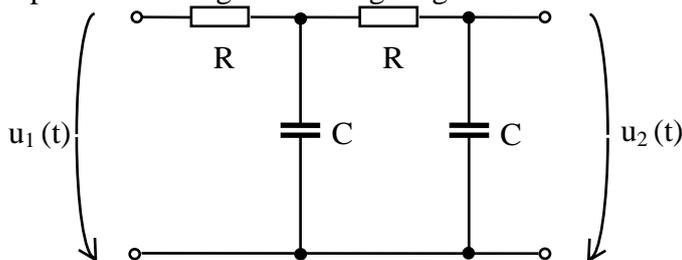


Abb. 3.22: Tiefpass 2.Ordnung

Frage 1: Wie verläuft die Ausgangsspannung der dargestellten Schaltung, wenn die Eingangsspannung bei $t = 0$ von 0 auf U_0 springt?

Frage 2: Wie lautet die Übertragungsfunktion $H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$?

Zusätzliche Aufgabe 3.2.5

Ein DC - DC Wandler nach Abb. 3.23 mit $L = 100 \text{ mH}$, $R = 10 \Omega$, $U_0 = 10 \text{ V}$, $t_E + t_A = 1 \text{ ms}$, $t_E/(t_E + t_A) = 0,1; 0,5$ und $0,9$

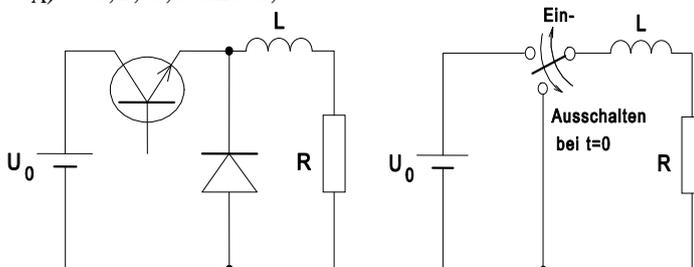


Abb. 3.23: DC - DC Wandler Schaltung und Prinzipschaltung

Frage 1: Wie ist das Verhältnis der Leistungen der Quelle und des Verbrauchers?

Frage 2: Wie groß sind die Mittelwerte von u_R , i_R und i_{Eingang} ?

Hinweis: Näherung: $di/dt = \text{const.}$ (entspricht dem Anfang der Exponentialfunktion)

3.2.5 Messung des Ein- und Ausschaltens eines Schwingkreises

Darstellen der Zeitverläufe von Strom und Spannungen an der Induktivität bzw. der Kapazität, Untersuchen der Abhängigkeit der Parameter der Zeitverläufe beim Ein- und Ausschalten von der Größe der Induktivität, der Kapazität, des Widerstandes und der Spannung.

Versuchsaufbau:

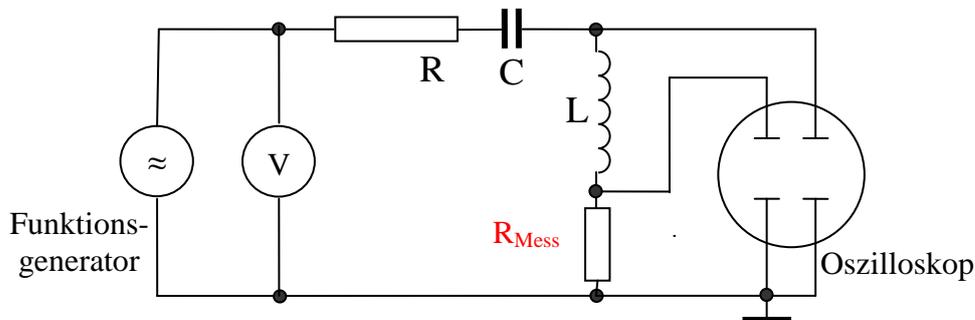


Abb. 3.24: Schaltung des Versuchsaufbaus

Hinweis: Als Messwiderstand (R_{Mess}) zur Strommessung werden 10Ω eingesetzt.

Versuchsdurchführung:

Messung und Darstellen von Strom und Spannungen mit einem Oszillografen, Nutzung einer Rechteckspannung für den Ein- und Ausschaltvorgang, Übergabe der Kurven an einen PC und Auswertung, Vergleich mit berechneten Verläufen und Parametern.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Ein- und Ausschaltvorgänge bei $U = 5 \text{ V}$, $L = 300 \text{ mH}$, $C = 0,22 \mu\text{F}$ sowie veränderlichem Widerstand. Stellen Sie den periodischen Fall, den aperiodischen Fall und den Grenzfall dar. Ermitteln Sie den Widerstand für den Grenzfall mit Hilfe des Kurvenverlaufes.
 - 1.1. Bestimmen Sie die Dämpfung, die Eigenfrequenz und die Resonanzfrequenz für $R = 300 \Omega$.
 - 1.2. Bestimmen Sie den Widerstand und die Dämpfung für den Grenzfall.
 - 1.3. Bestimmen Sie die beiden Zeitkonstanten bei $R = 5000 \Omega$.
 - 1.4. Stellen Sie die logarithmische Spirale dar und zeigen Sie daran den aperiodischen Grenzfall.
2. Bestimmen Sie R , L und C aus den Messkurven

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Die dargestellten Kurven stimmen mit Abb. 3.9 bis Abb. 3.11 sowie Abb. 3.13 bis Abb. 3.15. sehr gut überein.
2. Die aus den Kurven ermittelten Parameter entsprechen recht gut den Werten der eingesetzten Bauelemente. Nur die Induktivität der Spule weicht deutlich vom Typenschild ab. Die eingesetzte Spule (Vorschaltgerät für eine Hochdrucklampe) ist für 50 Hz vorgesehen (Material des Kerns) $\omega_e/2\pi$ ist aber ca. 800 Hz .
3. Beim aperiodischen Fall ist die Messgenauigkeit auch bei exakter Messdurchführung nicht sehr hoch. Das zeigt eine Fehlerrechnung.

$u_L(2t_{\text{Max}}) = -U_0 e^{-\delta 2t_{\text{Max}}}$ nach δ aufgelöst ergibt den Fehler

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = \frac{\delta_{\text{Mess}} - \delta_{\text{Soll}}}{\delta_{\text{Soll}}} = -\frac{\Delta t_{\text{Max}}}{t_{\text{Max}}} + \left(\frac{\Delta U_0}{U_0} - \frac{\Delta u_L(2t_{\text{Max}})}{u_L(2t_{\text{Max}})} \right) \ln^{-1} \left(\frac{U_0}{-u_L(2t_{\text{Max}})} \right)^{53}$$

Bei $U_0 = 5 \text{ V}$ und $u_L(2t_{\text{Max}}) \approx -100 \text{ mV}$ wird $\ln^{-1}(\cdot) \approx 0,25$. Das Hauptproblem ist die Kurvenauflösung wenn bei $u_L(2t_{\text{Max}})$ ein Pixel Unterschied für den Cursor ca. 50 mV ausmachen.

Nach Abklingen des schnellen Vorgangs könnte δ_2 genauer bestimmt werden. Für technische Zwecke kann bei genügend großem δ_1 der Vorgang in der Regel als Verzögerung 1. Ordnung allein mit δ_2 genähert werden.

⁵³ Der Fehler wird z.B. mit dem totalen Differential berechnet.

4 Ausblick, weitere Transformationen zur Signalanalyse

Neben der komplexen Rechnung, der Fourierreihe, der Fouriertransformation und der Laplacetransformation wurde bereits die diskrete Fouriertransformation behandelt.

Darüber hinaus gibt es in der Regelungstechnik mit der Z-Transformation auch eine diskrete Laplacetransformation, die für abgetastete Signale und deren Verarbeitung angewandt wird.

Die Fouriertransformation und die diskrete Fouriertransformation können auch in einer zwei-, drei- oder mehrdimensionalen Form (z.B. eine Ortsebene x, y oder ein Ortsraum $x, y, z \leftrightarrow$ Wellenzahlebene k_x, k_y oder ein Wellenzahlraum k_x, k_y, k_z ; mit den Wellenzahlen $k_x = 2\pi / \lambda_x$, $k_y = 2\pi / \lambda_y$, $k_z = 2\pi / \lambda_z$ – analog zu $\omega = 2\pi / T$) verwendet werden. Das wird insbesondere für die Bildbearbeitung genutzt. So entsprechen Kanten in der Ortsebene hohen Wellenzahlen in der Wellenzahlebene und werden von Kompressionsmethoden (JPEG, MPEG ...) teilweise eliminiert.

Nach dem gleichen Prinzip werden in der Bildbearbeitung verschiedene mathematische Abbildungsfunktionen verwendet, die einen Ortsraum in einen Abbildungsraum transformieren (z.B. Drehungen oder Verzerrungen). Dazu werden die digitalisierten Pixeldaten in der Art der digitalen Transformationen behandelt. Hier liegt die Domäne des Einsatzes der Signalprozessoren.

5 Projektaufgabe

Die Projektaufgaben sind weitgehend selbstgesteuert zu wählen, zu konzipieren und in Gruppen zu bearbeiten.

Die Problemstellungen betrafen bisher folgenden Rahmen:

- Messtechnische Untersuchungen des Frequenzverhaltens z.B. von Vorverstärkern, Mikrofonen und Lautsprechern zu ihrer Qualitätsbewertung.
- Untersuchung des Einflusses der Abtastfrequenz bei der Digitalisierung von Audiosignalen.
- Bau und Erprobung einer Audioübertragungsstrecke mit Sender und Empfänger für Frequenzmodulation.
- Untersuchung der Multitonmodulation mit DFT und inverser DFT sowie Demonstration ihrer Funktionsweise mit Programmen auf dem PC.

Die Projektaufgaben beinhalten eine Dokumentation sowie eine Präsentation der erreichten Ergebnisse.

6 Literaturverzeichnis

- [1] Dörner, Dietrich: Die Logik des Mißlingens, S. 58 und insgesamt, Rowohlt Verlag GmbH 1989
- [2] Lunze, Klaus: Theorie der Wechselstromschaltungen, (8. Auflage), S. 60, 127 ff, 211 bis 217 und 221, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [3] Heumann, Klemens: Grundlagen der Leistungselektronik, (2. Auflage), S. 94 ff, B. G. Teubner Stuttgart 1978
- [4] Fritsche, Gottfried: Signale und Funktionaltransformationen, S. 26 ff, Verlag Technik GmbH Berlin 1985
- [5] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik, (19. Auflage), S. 689ff, Verlag Nauka Moskau und BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1979