

Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Technik, Arbeitsprozesse und Berufliche Bildung

**Skript zur Lehrveranstaltung
„Einführung in die Elektrotechnik“**

Erich Boeck

Theoretische Grundlagen und ihre Anwendung
zur Analyse elektrotechnischer Prozesse

0 Inhaltsverzeichnis

0	Inhaltsverzeichnis.....	3
1	Einleitung – Analyse elektrotechnischer Prozesse.....	5
2	Einführung zu den theoretischen Grundlagen.....	8
3	Vorgänge in elektrischen Leitern.....	11
3.1	Grundbegriffe für elektrische Größen im Leiter.....	11
3.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen.....	11
3.1.2	Messung der Größen in elektrischen Leitern.....	14
3.1.3	Übungsaufgaben zur Verdeutlichung praktischer Größenordnungen.....	16
3.1.4	Wichtige Formen und Kenngrößen.....	17
3.1.5	Messung und Darstellung von Feldern in leitenden Medien – Feldlinien.....	18
3.2	Strom-Spannungs-Beziehung am Widerstand.....	20
3.2.1	Driftbewegung und Ohm'sches Gesetz.....	20
3.2.2	Bauformen und Kenngrößen.....	22
3.2.3	Messung von Widerständen.....	23
3.2.4	Übungsaufgaben zum Widerstand.....	24
3.3	Kirchhoff'sche Sätze sowie Reihen- und Parallelschaltung.....	25
3.3.1	Knotenpunkt und Maschensatz.....	25
3.3.2	Parallel- und Reihenschaltung, Strom- und Spannungsteilung.....	26
3.3.3	Übungsaufgaben zu einigen praktischen Anwendungen.....	27
3.4	Energieumwandlung und Leistung.....	29
3.4.1	Energie, Leistung und Wirkungsgrad.....	29
3.4.2	Messung von Energie und Leistung.....	30
3.4.3	Übungsaufgaben zur Leistung.....	32
4	Vorgänge in elektrischen Nichtleitern.....	33
4.1	Grundbegriffe für elektrische Größen im Nichtleiter.....	33
4.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen.....	33
4.1.2	Messung und Darstellung von elektrostatischen Feldern.....	35
4.2	Ladung, Strom und Spannung am Kondensator.....	36
4.2.1	Zusammenhang zwischen Ladung, Spannung und Strom.....	36
4.2.2	Bauformen und Kenngrößen.....	39
4.2.3	Messung der Kapazität.....	40
4.2.4	Übungsaufgaben zur Kapazität.....	40
4.3	Energie und Kräfte im elektrischen Feld des Nichtleiters.....	42
4.3.1	Beschreibung von Energie und Kräften.....	42
4.3.2	Anwendungsbeispiel und Übungsaufgabe zum Messoszilloskop.....	43
4.3.3	Messung von Zeitverläufen an der Kapazität.....	46
5	Vorgänge im Magnetfeld.....	48
5.1	Grundbegriffe für magnetische Größen.....	48
5.1.1	Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen.....	48
5.1.2	Übungsaufgaben zum magnetischen Kreis.....	51
5.1.3	Das Durchflutungsgesetz.....	52
5.1.4	Messung und Darstellung von magnetischen Feldern – Feldlinien.....	53
5.1.5	Lorentzkraft.....	54
5.1.6	Das Induktionsgesetz.....	55
5.1.7	Übungsaufgaben zur Durchflutung und Induktion.....	58

5.2	Koppelfluss, Strom und Spannung an der Spule.....	61
5.2.1	Zusammenhang zwischen Koppelfluss, Spannung und Strom	61
5.2.2	Bauformen und Kenngrößen	64
5.2.3	Messung der Induktivität.....	65
5.2.4	Übungsaufgaben zur Induktivität	66
5.2.5	Messung von Zeitverläufen an der Induktivität	67
5.3	Energie und Kräfte im magnetischen Feld	69
5.3.1	Beschreibung von Energie und Kräften	69
5.3.2	Übungsaufgaben zu Kräften im Magnetfeld	71
6	Zusammenfassung und Gegenüberstellung.....	72
6.1	Gegenüberstellung der Grundgrößen	72
6.2	Fortführungen zu den theoretischen Grundlagen	75
7	Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke	76
7.1	Grundstromkreis.....	76
7.1.1	Analyse eines Grundstromkreises	76
7.1.2	Interpretation der Kenngrößen für verschiedene Anwendungen	80
7.1.3	Messungen am Grundstromkreis.....	82
7.1.4	Übungsaufgaben zu Anwendungen des Grundstromkreises	84
7.2	Netzwerke – verzweigte und vermaschte Schaltungen	86
7.2.1	Analyse verzweigter und vermaschter Schaltungen.....	86
7.2.2	Übungsaufgaben zur Schaltungsberechnung	90
7.3	Überlagerungsprinzip	93
7.3.1	Schaltungsanalyse mit Hilfe des Überlagerungssatzes	93
7.3.2	Übungsaufgaben zum Überlagerungssatz	94
7.4	Ersatzzweipole	95
7.4.1	Schaltungsanalyse mit Hilfe von Ersatzzweipolen	95
7.4.2	Übungsaufgaben zu Ersatzzweipolen.....	96
7.5	Modellierung und Simulation.....	97
7.5.1	Grundlagen der Modellierung für Simulationsprogramme	97
7.5.2	Übungsaufgaben mit Rechnersimulation	98
7.6	Ausblick zu weiteren Analysemethoden	99
8	Literaturverzeichnis.....	100

1 Einleitung – Analyse elektrotechnischer Prozesse

Jeder Arbeitsprozess (ob in der Facharbeit, der Ingenieurstätigkeit oder Tätigkeit eines Lehrers im Unterricht) erfordert eine Verbindung von Wissen und Fähigkeiten mehrerer verschiedener Disziplinen; ist eine interdisziplinäre Tätigkeit. Wird die Analyse der elektrotechnischen Arbeit an den Leistungen/Dienstleistungen für die Kunden orientiert [1], ergibt sich eine Systematik zur Einteilung in Handlungsfelder und für Unterricht in Lernfelder. Eine solche Einteilung entspricht den Erfordernissen der Arbeitsprozesse z.B. in der Facharbeit. Hauptziel der Arbeitsprozessorientierung der Ausbildung ist es (meines Erachtens), den Auszubildenden unmittelbar zu ermöglichen, die notwendigen Verbindungen des Wissens der verschiedenen Disziplinen zu erleben, herzustellen und mit dem Arbeitsprozess selbst zu verknüpfen. (In der traditionellen Ausbildung wird gerade dieses vorwiegend jedem selbst überlassen.) Mit einer solchen Erfahrung können Gestaltungsspielräume beim Lösen von Aufgaben wahrgenommen und ausgefüllt werden.

In der Arbeit sind elektrotechnische Fragestellungen und Arbeitsaufgaben enthalten, deren sachgemäße Erfüllung in unserem Fall der bestimmende Teil für die erfolgreiche Realisierung der Arbeitsaufgabe ist. Zur Bewältigung dieses Teils ist elektrotechnisches Fachwissen unabdingbar. Sicher unverzichtbar, aber auch schnell vergänglich reichen einfache **Informationen, Informationssammlungen**¹ nicht, um den Einsatz zu bewerten, örtliche Anpassungen zu entscheiden, geschweige denn ein Zusammenwirken mit vorhandenen (ev. älteren) Teilen zu gewährleisten. Dazu sind hinreichend theoretisch fundiertes sowie anwendungsbereites aktives Wissen und Können (in allen relevanten Disziplinen) erforderlich.

Aktives Wissen erlaubt

- ein **Denken**, das zum Verständnis und zu der Fähigkeit einer Bewertung der betreffenden elektrotechnischen Vorgänge führt sowie
- ein **Verstehen** der notwendigen Zusammenhänge zwischen den Vorgängen ermöglicht.

Anwendungsbereites Wissen befähigt zu

- bewusstem **selbstgeführtem** praktischem Handeln sowie
- dem Erkennen und Nutzen **vorhandener** Gestaltungsmöglichkeiten.

Auch das elektrotechnische Fachwissen tritt in einem realen Arbeitsprozess (und in einem Lernfeld) immer in komplexer Form auf. Hier kommt zum Tragen, dass seit der Herausbildung der Elektrotechnik die Tätigkeit auf diesem Gebiet von drei **Besonderheiten** dieser Technik bestimmt wird.

¹ z.B. Informationen

- über einsetzbare Elemente, Geräte und Anlagen sowie deren Ausstattungsmerkmale von möglichst vielen Anbietern oder
- zur Befestigung/Aufstellung, Montage und Installation der „vom Kunden“ ausgewählten Geräte oder
- über Vorschriften zur Auswahl bzw. Dimensionierung von Zuleitungen Sicherungen u.Ä.

Unabhängig von den immer schnelleren Veränderungen der Technologien sind **Vorgänge und Prozesse der Elektrotechnik** grundsätzlich durch

- **Intransparenz**, die nur punktuell durch Messmittel aufgehoben werden kann,
- heute sogar noch stark zunehmende **Komplexität** und
- eine deutliche **Eigendynamik**

gekennzeichnet.

Diese Besonderheiten verbinden die Elektrotechnik z.B. mit der Informatik und der Prozesssteuerung sowie weiteren Bereichen (vergleiche [2]).

Der Umgang mit diesen Besonderheiten verlangt in der Vorstellung von Elektrotechnikern ein gedankliches Abbild der Vorgänge und Prozesse sowie einen ständigen Vergleich mit den punktuell sichtbaren Ereignissen. Nur durch dieses „**elektrotechnische Denken**“ gepaart mit der Entwicklung der notwendigen **Intuition** kann die tatsächliche Funktion kontrolliert, eine Anlage in Betrieb genommen, ein Prozess gesteuert und optimiert, eine Fehlfunktion korrigiert oder gar eine Anlage geplant, projiziert und errichtet werden, d.h. Gestaltung (auf der elektrotechnischen Ebene) realisiert werden.

Komplexität wird immer individuell wahrgenommen und verarbeitet, so dass jeder Lernende seinen Weg finden, seine **Intuition** entwickeln muss. Für den Lehrenden heißt das, Komplexität bewusst zu reduzieren, Wissen entsprechend seiner inneren Logik aufzubauen, und bis die notwendige Basis geschaffen ist, schrittweise zu komplexeren Prozessen vorzudringen. Dabei ist es kein Widerspruch, Wissen auf praktische Gegenstände der Arbeitsprozesse/Lernfelder zu beziehen, aber eine komplexe Aufgabe kann am Anfang (meines Erachtens) nur als Orientierung dienen.

Jede **Disziplin** benötigt zu ihrem Verständnis (und so zur Erlangung eines aktiven Wissens) entsprechend ihrer eigenen inneren logischen Struktur eine konsequente Darstellung. So ist es nicht möglich, aus der Systematik der Elektrotechnik heraus den Arbeitsprozess und seine optimale, folgerichtige Gestaltung zu vermitteln (oder zu erkennen). Genauso ergibt sich aus der Systematik des Arbeitsprozesses kein logisches Verständnis der inneren Zusammenhänge eines Wissensgebietes und bruchstückhafte Wissensvermittlung kann nicht zum Erfolg führen. Der Versuch erzeugt eine Degradierung von Wissen; es reichen Kurzerklärungen oder Informationssammlungen (etwa von Arbeitsblättern). Dies ergibt auch eine Haltung zur Abwertung von Wissen.

Es muss dagegen gelingen, bei den Auszubildenden eine Akzeptanz des interdisziplinären Charakters und der Notwendigkeit von aktivem Wissen zu erreichen.

Welche Forderungen sind an eine Theorie und ihre Vermittlung zu stellen, damit sie für eine praktische Tätigkeit als unverzichtbares und hervorragendes „Werkzeug“ erkannt wird.

- Die Theorie muss eine Plausibilitätsebene besitzen, die Anschaulichkeit und Verständlichkeit anspricht und so Vorstellungskraft und Fantasie erreicht.
- Der Formalismus der Theorie muss für die Lernenden handhabbar sein bzw. beim Umgang mit ihr werden.
- Bei der Vermittlung sind unmittelbar relevante praktische Konsequenzen und Schlussfolgerungen aufzuzeigen und die „Entfaltung der Theorie“ für eine Fragestellung der Anwendung muss selbst erlebt werden.

In diesem Zusammenhang sind physikalisch exakte Begriffe (z.B. für Strom, Spannung usw.) unabdingbar für ein wirkliches Verständnis der Theorie. Zur praktischen Nutzung in den Arbeitsprozessen sind dagegen für diese Größen vor allem Erfahrungen mit den Zahlenwerten bei ihrer Messung erforderlich (z.B.: Was sagen mir 238 V gemessene Netzspannung statt 230V? Oder z.B. noch einfacher: Was ziehe ich bei 83 ° F an?).

In meiner Ausbildung habe ich Theorien grundsätzlich immer orientiert auf praktische Anwendungen erfahren. Vielfach konnte ich dabei erleben, wie sich ganze Felder mit neuen Gestaltungsmöglichkeiten eröffneten. Ausgehend von einem arbeitsprozessorientierten Unterricht mit angelegtem Gestaltungsspielraum kann das Nutzen dieses Freiraumes mit aktivem Wissen erlebt werden und das muss einen echten Wissenserwerb fördern.

Zusätzliche Aspekte für Lehrerstudenten in Bezug auf ihre eigene Tätigkeit bezüglich elektrotechnischen Fachwissens sind:

- Das Wissen, welches im Unterricht vermittelt wird, muss in die Zusammenhänge des Fachgebietes eingebettet und somit von ihnen bewertet werden können.
- Die Fachliteratur muss ausgewertet, bewertet und zutreffende Entwicklungen müssen umgesetzt werden können.
- Technische Lernumgebungen müssen geplant, entwickelt, erprobt, realisiert und gewartet werden können.

Die theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik sind ein wichtiger Gegenstand dieser Lehrveranstaltung und das Ziel ist eine Vermittlung in genanntem Sinne. Der Aufbau folgt der Logik des Verständnisses des Gegenstandes ². Dabei werden an allen sinnvollen Stellen die Bezüge zur praktischen Tätigkeit (d.h. auch zu Arbeitsprozessen) dargestellt und mit Übungsaufgaben sowie Versuchsaufgaben zur Vertiefung versehen. In der Weiterführung (2. bis 4. Semester) werden kleine Projektaufgaben einen komplexeren Rahmen annehmen.

Mit elektrotechnischen Prozessen bezeichnen wir Vorgänge und Abläufe in Systemen (Elemente, Geräte und Anlagen) einschließlich ihrer Intransparenz, Komplexität und Eigendynamik. Die Lehrveranstaltung ist für Studenten vorgesehen, die solche Prozesse insbesondere analysieren, verstehen und bewerten können müssen.

² Das ist nicht identisch mit der Systematik der Fachdisziplin, da historische und lösungsmethodische Hierarchien nicht einfließen müssen.

2 Einführung zu den theoretischen Grundlagen

Im Altertum waren bereits die Erscheinungen der Anziehungskraft bei „geriebenem“ Bernstein oder bei einigen eisenhaltigen Mineralien bekannt. Es wird auch vermutet, dass einige Ausgrabungen auf die Möglichkeit zum Galvanisieren (versilbern, vergolden) hinweisen könnten (so genannte Batterie von Bagdad). Im 16. und 17. Jahrhundert gab es mehrere Versuche und Arbeiten zu Magnetismus und Reibungselektrizität. Exakte Untersuchungen von Ladungen unternahm insbesondere Coulomb [3]. Dennoch begann eine systematische Untersuchung erst mit den Entdeckungen von Galvani und Volta, die in ihrer Folge verwendbare Quellen hervorbrachten.

Ein entscheidender Schritt waren die durch Faraday entwickelten Vorstellungen von Feldern und Feldlinien, verbunden mit dem Übergang zu einer Deutung durch Nahwirkungen, die zu einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit aller Wechselwirkungen führten. Diese Vorstellungen wurden dann von Maxwell mathematisch in anerkannter Weise formuliert.

Damit wurden nun für die Physik zwei Probleme sichtbar:

- Es muss auch im Vakuum einen Träger für die Felder (die Nahwirkungen) geben, dieses führte zur Äthertheorie, und
- die Felder waren nicht invariant gegenüber Galileitransformationen von einem Inertialsystem in ein anderes. D.h., das bewährte Relativitätsprinzip aus der klassischen Physik galt für die Felder nicht und dies trennte die physikalischen Theorien.

Die Problematik wurde nicht einfacher, nachdem Michelson und Morley in ihrem Versuch keinen Ätherwind nachweisen konnten und sich damit die immer komplizierter werdende Äthertheorie nicht bewährte.

Einsteins Gedanke, umgekehrt vorzugehen [4] und das Relativitätsprinzip der Feldtheorie, welches er in der Lorentztransformation erkannte, auf die klassische Physik anzuwenden, schuf wieder eine einheitliche Physik. Dabei ergab sich aber als „Nebeneffekt“ das ersatzlose Streichen der Äthertheorie und mit ihr vieler Vorstellungen, aus denen die Begriffswelt der Elektrotechnik z.T. hervorgegangen war. Alle physikalischen Vorgänge waren ausreichend in der mathematischen Formulierung enthalten und diese wiederum in hervorragender und vielfältiger Weise praktisch bestätigt worden [5]. Somit entstand aber ein „Verzicht“ auf das Verständnis der Funktionsweise der oben genannten Nahwirkung. (In der folgenden Zeit wurde durch den Übergang zu mathematischen Räumen mit vierdimensionalen Koordinaten und dem Tensorkalkül die Anschaulichkeit in der theoretischen Physik weiter „vernachlässigt“.)

In der Elektrotechnik besteht die Möglichkeit, Anschaulichkeit und Plausibilität zu erreichen, indem die Begriffe konsequent aus praktischen Beobachtungen (dem Experiment, den Messungen) dargestellt werden und die Mathematik „nur“ zur Formulierung unserer Beobachtungen herangezogen wird.

Die Berechtigung dazu ergibt sich, weil die Elektrotechnik vorrangig durch praktische und experimentelle Erfahrungen entstanden ist. Eine theoretische und mathematische Formulierung wurde vielfach anschließend auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse erstellt. (So erscheinen viele Gesetzmäßigkeiten als „mathematischer Ausdruck einer Messkurve“, z.B. das Ohm'sche Gesetz). Für die Herausbildung der Vorstellungen in der Elektrotechnik hat diese Entwicklung eine erkennbare Bedeutung gehabt.

Der Ausgangspunkt ist die Ladung Q , weil sie als **Naturgröße** betrachtet und vielfältig nachgewiesen werden kann.

In der Natur gibt es positive und negative Ladungen, immer in gleicher Menge, also ausgeglichen. Es kann aber zeitweilig in begrenzten Gebieten durch Ladungstrennung (z.B. durch Reibung) ein Überschuss bzw. Mangel erzeugt werden, auch wenn insgesamt der Ladungsausgleich immer bestehen bleibt. Dabei existiert eine kleinste Ladungsmenge (Elementarladung $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$)³, d.h.:

$$Q = N \cdot q_0 \quad N = \text{Anzahl} \quad . \quad (2.1)$$

Andererseits wird die Ladungsmenge, wenn sie nicht zur Punktladung vereinfacht werden kann, durch die Raumladungsdichte ($\rho = \text{Ladung pro Volumenelement}$) ausgedrückt.

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{und} \quad Q = \int_V \rho dV \quad (2.2)$$

Für die elektromagnetischen Vorgänge und somit die Elektrotechnik hat es sich bewährt nach Faraday, davon auszugehen, dass sich die Wirkungen der Ladung in Form einer Nahwirkung ausbreiten. Das Prinzip besteht darin, dass von der Ladung eine Wirkung nur auf ihre unmittelbare Umgebung erfolgt, diese dann die Wirkung wiederum auf ihre unmittelbare Umgebung weitergibt usw. An einem betrachteten Raumpunkt kommt die Wirkung also mit einer entsprechenden Zeitverzögerung an. Damit breiten sich für unsere Untersuchungen (in der „makroskopischen“ Elektrotechnik) von einer Ladung über eine Nahwirkung in den Raum zwei Faktoren aus, die wir beschreiben wollen; zusätzlich ist ihre Bewegung zu beschreiben.

1. Die Verbindung einer Ladung mit der gleichen Größe an Gegenladungen,
2. eine in jedem Punkt des Raums zu jeder Zeit messbare Kraftwirkung einer Ladung auf andere Ladungen und
3. die Bewegung der Ladungen selbst.

Die beiden ersten Faktoren sind miteinander verbunden, haben aber unterschiedliche Auswirkungen, so dass es sinnvoll ist, beide zu beschreiben. Der erste Faktor breitet sich unabhängig vom umgebenden Material im Raum aus⁴, der zweite wird vom umgebenden Material deutlich beeinflusst. Die dazugehörigen Begriffe werden zuerst in einem Beobachtungssystem (Koordinatensystem) untersucht, in dem die erzeugenden Ladungen ruhen.

Das ergibt das elektrostatische Feld.

Die Beschreibung der Bewegung der Ladungen führt zum Begriff des elektrischen Stromes. Die Untersuchung der entsprechenden Begriffe erfolgt in einem Beobachtungssystem, in dem die Leiter ruhen.

³ Im metrischen Maßsystem hat die Ladung keine Grundmaßeinheit bekommen und wird in Amperesekunden (As) gemessen, und nach Coulomb (C) genannt.

⁴Die Menge der notwendigen Gegenladungen kann sich nicht durch das dazwischen liegende Material ändern. Bei praktischen Berechnungen wird deshalb in der Regel von dieser Größe ausgegangen (siehe [6]).

Das ergibt das elektrische Strömungsfeld.

Darüber hinaus sind aber auch die Effekte zu untersuchen, die durch die Bewegung der Ladungen erst erzeugt werden. Eine tiefgründige Untersuchung dieser Effekte kann erst mit der speziellen Relativitätstheorie verstanden werden [7]. Bei den experimentellen Untersuchungen traten sie historisch gesehen als „eigenständiges“ Feld hervor.

Das ergibt das Magnetfeld.

Mit dieser Betrachtung können letztendlich **alle von der Ladung ausgehenden Wirkungen** auf **Kräfte zwischen Ladungen** bei Beachtung **des Nahwirkungsprinzips** zurückgeführt werden. Das heißt auch, dass der Nahwirkung eine Existenz zukommt, auch wenn ihr Mechanismus in der „makroskopischen“ Elektrotechnik nicht untersucht wird und in der Theorie keine direkte Rolle spielt.

Da sich die Zusammenhänge am anschaulichsten beim elektrischen Strömungsfeld zeigen lassen und dabei auch die geringsten mathematischen Anforderungen auftreten, wird mit diesem begonnen. Es folgen das elektrostatische Feld und das Magnetfeld.

Ab dem Kapitel „Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke“ beginnen die Anwendungen dieses Wissens zur

- Analyse von Bauelementen und Schaltungen der Elektrotechnik (Stromkreise und Netzwerke) einschließlich der Erarbeitung dazu notwendiger Methoden anhand praktisch besonders bedeutsamer Beispiele.

Diese Anwendungen werden in den folgenden Semestern mit der

- Analyse von Bauelementen und Schaltungen der Informationstechnik (Analog- und Digitaltechnik),
- Analyse von Schaltungen und Geräten der Audio- und Videotechnik sowie
- Analyse von Antriebsprozessen, deren Steuerung und von Prozessen der Energiewandlung

fortgesetzt. Dazu werden die Methoden zunehmend ausgebaut. Die Darstellung folgt der Logik des Verständnisses der elektrischen Vorgänge. Somit ergibt sich *keine* Einteilung des Wissens nach Gleich-, Wechselstrom usw., sondern es werden dann bei der Analyse der verschiedenen Prozesse die jeweils erforderlichen Methoden eingesetzt.

3 Vorgänge in elektrischen Leitern

3.1 Grundbegriffe für elektrische Größen im Leiter

3.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung der Vorgänge in elektrischen Leitern ist die **Naturgröße Ladung**, wie sie in Abschnitt 2 gezeigt wurde.

Um die **Bewegung der Ladungen zu beschreiben** (ohne von der Bewegung ausgehende zusätzliche Wirkungen), wird die eingängige **Rechengröße** elektrischer Strom I ⁵ definiert. Der Ausgangspunkt ist der Sonderfall des linienhaften Leiters (Abb. 3.1), der ruhend im Beobachtungssystem angeordnet ist.

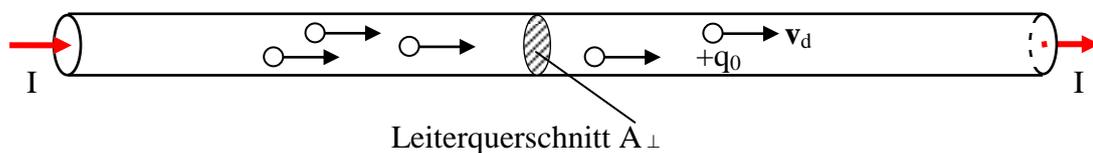


Abb. 3.1: Bewegte Ladungen und Leiterquerschnitt im Leiter

Die Ladungen $+q_0$ bewegen sich mit der mittleren Driftgeschwindigkeit v_d in Richtung des Stromes. (Elektronen mit $-q_0$ würden sich mit $-v_d$ entgegengesetzt bewegen.) Der Strom berechnet sich nun aus dem Anteil der Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt tritt.

Definition: elektrischer Strom I

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{und} \quad Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt \quad (3.1)$$

Diese Größe kann praktisch nicht direkt nach dieser Definition sinnvoll gemessen werden⁶, sondern es werden Wirkungen des Stromes genutzt. Sie beschreibt aber genau das an diesem Vorgang, was elektrisch wichtig und notwendig ist.

Zur Beschreibung der Bewegung der Ladungen (des Stromes) in räumlich ausgedehnten Leitern nutzt man den Begriff der Stromdichte \mathbf{S} ⁷, in welchem der Anteil des Stromes durch ein kleines Flächenelement (dA_{\perp}) senkrecht zur Stromrichtung (\mathbf{e}_l) berechnet wird.

Definition: Stromdichte \mathbf{S}

$$|\mathbf{S}| = \frac{dI}{dA_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = |\mathbf{S}| \mathbf{e}_l \quad \text{und} \quad I = \int_{\text{Querschnittsfläche}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.2)$$

Die Stromdichte kann in jedem Punkt des Leiters bestimmt (gemessen) werden (in Betrag und Richtung).

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes – dem elektrischen Strömungsfeld.

⁵ Im metrischen Maßsystem erhielt der Strom die Grundmaßeinheit A, benannt nach Ampère.

⁶ Es wäre nach dem Faraday'schen Abscheidungsgesetz aber in günstigen Fällen möglich.

⁷ Maßeinheit A/m²

Die Darstellung der Stromdichte kann auch aus Driftgeschwindigkeit ($\mathbf{v}_d = d\mathbf{s}_l/dt$) und der Raumladungsdichte ⁸ erfolgen

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}_d \rho = \frac{d\mathbf{s}_l}{dt} \frac{dQ}{dV} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \frac{dQ}{ds dA_{\perp}} \mathbf{e}_l = \frac{d}{dt} \frac{dQ}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_l = \frac{dI}{dA_{\perp}} \mathbf{e}_l \quad (3.3)$$

und entspricht so direkt der Vorstellung einer mit \mathbf{v}_d strömenden Raumladungsdichte ρ .

Zur **Beschreibung der Kraftwirkungen** wird in jedem Raumpunkt $P(x,y,z)$ (und zu jeder Zeit t) um eine ruhende Ladung mit einer ebenfalls ruhenden Probeladung ⁹ (Q_p) die Kraft \mathbf{F} gemessen (Abb. 3.2). Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Wirkung der Ladung nach dem bewährten Prinzip der oben genannten Nahwirkung ausbreitet.

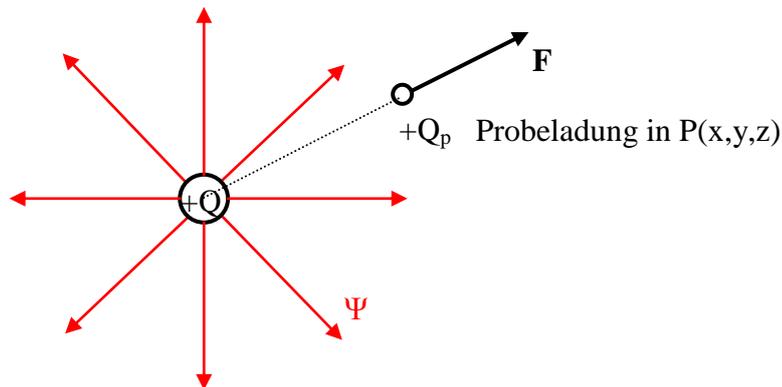


Abb. 3.2: Probeladung im Feld einer Ladung

Da diese Kraft in jedem Punkt des Raumes ermittelt werden kann, stellt sie ebenfalls als mathematische Beschreibung ein Feld dar, das in jedem Punkt einen Vektor (Betrag und Richtung) bestimmt. Weil dieses Kraftfeld von der Größe der verwendeten Probeladung abhängt, wird der Begriff des elektrischen Feldes \mathbf{E} ¹⁰ von dieser Abhängigkeit entkoppelt.

Definition: elektrisches Feld \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_p} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = Q_p \mathbf{E} \quad (3.4)$$

Die Definition (3.4) erfolgt demzufolge aus der **messbaren Kraft auf eine Probeladung**. Es wird also nicht der Zustand des Raumes oder der Mechanismus der Nahwirkung erfasst, sondern nur deren Ergebnis, das mit der Kraft ermittelt wird. Es wird zu sehen sein, dass dieser Begriff mit dieser Interpretation folgerichtig (und ohne Spekulationen) die experimentellen Erfahrungen wiedergibt und praktisch exakt genutzt werden kann.

Bewegt sich die Probeladung in Abb. 3.3 auf ihrem Weg (mit dem Wegelement $d\mathbf{s}$) vom Punkt P_1 nach P_2 , kann die Änderung ihrer potentiellen Energie untersucht werden.

⁸ Dabei sind für die Raumladungsdichte nur die beweglichen Ladungsträger mit ihrer jeweiligen Geschwindigkeit anzusetzen (im Leiter nur die Elektronen mit \mathbf{v}_d).

⁹ Die Probeladung soll so klein sein, dass sie vernachlässigbare Rückwirkungen auf das Feld ausübt. Sie dient nur zur Messung.

¹⁰ Maßeinheit aus Kraft durch Ladung $N/As = V/m$ (V siehe Spannung)

$$\Delta W = \int_{r(P_1)}^{r(P_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q_p \int_{r(P_1)}^{r(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.5)$$

Wird die Abhängigkeit von der verwendeten Probeladung entkoppelt und die Abgabe, also der **Verbrauch elektrischer Energie positiv definiert**, bekommt man den Begriff der elektrischen Spannung U ¹¹. Nutzen wir einen absoluten Bezugspunkt (z.B. könnte die potentielle Energie im Unendlichen Null gesetzt werden, d.h. $W_\infty = \varphi_\infty = 0$), erhalten wir den Begriff des elektrischen Potentials φ ¹¹.

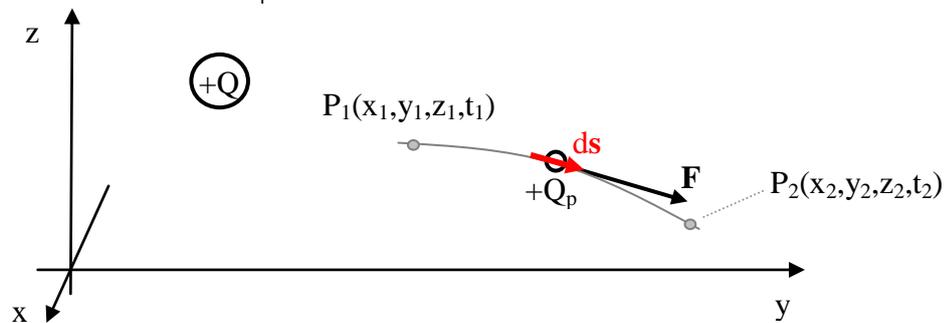


Abb. 3.3: Weg der Probeladung

Definition: elektrische Spannung U (und Potential φ)

$$U = \frac{\Delta W_{\text{Abgabe}}}{Q_p} = \frac{-\Delta W}{Q_p} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad \varphi = \frac{W}{Q_p} = \int_{r(P)}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \varphi_\infty$$

$$\Delta W = (W_{\text{Endwert}} - W_{\text{Anfangswert}}) \quad U = \varphi_{\text{Anfangswert}} - \varphi_{\text{Endwert}} \quad (3.6)$$

Wenn sich nach diesem Zusammenhang die Probeladung getrieben von der Kraft des Feldes bewegt¹² (d.h. Entfernung nimmt zu; siehe Abb. 3.3), nimmt ihre potentielle Energie ab.

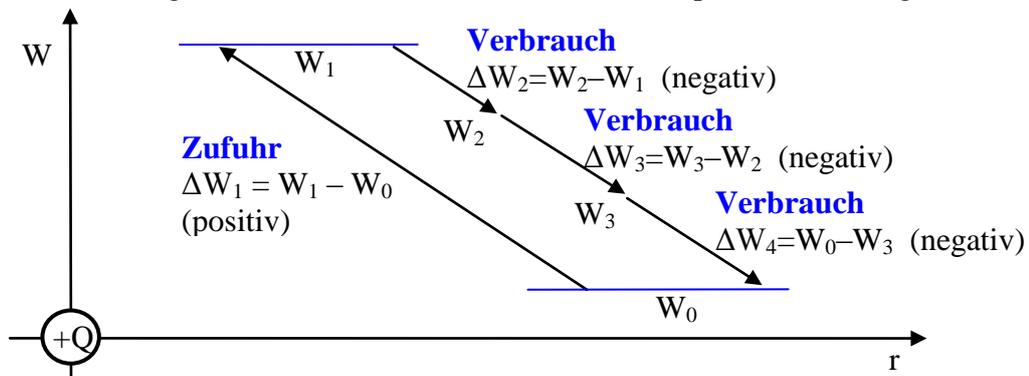


Abb. 3.4: Energie bei der Bewegung von +Q im Feld (schematisch)

Werden W bzw. φ kleiner, steigt in gleichem Maße der Verbrauch ΔW_{Abgabe} bzw. U (siehe schematische Darstellung in Abb. 3.4). Diese Energie wird in kinetische Energie, in Reibungswärme oder in andere Energieformen umgewandelt (Energieumwandlung aus dem Elektrischen ins Mechanische, in Wärme ...). Wird dagegen durch eine äußere Kraft die Probeladung gegen die Kraft des Feldes bewegt, erhöht sich ihre potentielle Energie (Energieumwandlung vom Mechanischen usw. ins Elektrische). Das ergibt ein positives ΔW (d.h. ein negatives ΔW_{Abgabe}) und damit eine negative Spannung U . In der Literatur (z.B. [8])

¹¹ Die Maßeinheit ergibt sich als Energie durch Ladung Nm/As oder wird nach Volta mit V benannt.

¹² Bewegte Probeladungen entsprechen einem Strom, vergleiche(3.1) und (3.3).

wird diese Spannung als Ursprung ($E_0 = \Delta W/Q_p = \Delta W_{\text{Zufuhr}}/Q_p$) bezeichnet oder Bereiche mit ΔW_{Zufuhr} werden umgangen.

Mit dieser Definition sind entsprechende Zählpfeilregeln verbunden ¹³.

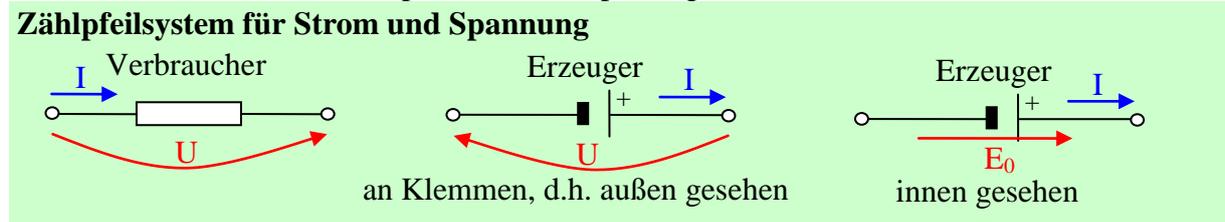


Abb. 3.5: Zählpfeilrichtungen

(Da Ursprünge nicht direkt messbar sind, werden sie in praktisch orientierter Ausbildung in der Regel weggelassen.)

Natürlich kann man aus der Spannung mit Hilfe der Umkehrung von (3.6) auch das elektrische Feld berechnen (ds zeigt in die Richtung von I also e_I).

$$\mathbf{E} = \frac{dU}{ds} \mathbf{e}_I \quad (\text{genauer } \mathbf{E} = \mathbf{grad}U = -\mathbf{grad}\varphi \quad \text{aus } U = \int_{r(P_2)}^{r(P_1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) \quad (3.7)$$

Durch experimentelle Untersuchungen wurde mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gefunden, dass

- die Richtungen von \mathbf{S} und \mathbf{E} immer gleich sind ¹⁴
- und sie über die Materialkonstante κ (Leitfähigkeit) zusammenhängen ¹⁵.

$$\mathbf{S} = \kappa \mathbf{E} \quad (3.8)$$

Mit diesen Begriffen können alle Vorgänge in elektrischen Leitern und damit die Vorgänge im elektrischen Strömungsfeld dargestellt werden.

3.1.2 Messung der Größen in elektrischen Leitern

Messung der Ladungsmenge

Die Messung der Ladungsmenge ist wichtig für eine Reihe von Sensoren (z.B. piezoelektrische Drucksensoren) und kann über ihre Kraftwirkung, über den Strom oder über die Spannung erfolgen.

Bei einer Messung über den Strom müssen alle Ladungen abfließen und dabei muss deren Summe gebildet werden. Da dieses einem Totalverlust entspricht, ist es nur zur Ermittlung von Ladungsänderungen sinnvoll.

Bei einer Messung über die Spannung sollte eine möglichst geringe Menge Ladungen abfließen, es wird deren Spannung $U = \Delta W_{\text{Abgabe}}/Q_{\text{abgeflossen}}$ gemessen und daraus die Ladung mit Hilfe von Parametern der Anordnung (siehe Abschnitt 4) ermittelt.

Eine Kraftmessung war historisch gesehen die entscheidende Untersuchungsmethode

¹³ Eine andere Definition würde andere Zählpfeilregeln ergeben.

¹⁴ Positive Ladungen werden immer in Richtung des el. Feldes angetrieben (also auch die Stromdichte).

¹⁵ Die Leitfähigkeit kann von der Temperatur und anderen Einwirkungen abhängen (siehe AEP II), ist aber weitgehend konstant. Ihre Maßeinheit ist $(A/m^2)/(V/m) = A/Vm$.

(Torsionswaage von Coulomb). Auch das Elektrometer (Abb. 3.6) nutzt im Prinzip eine Kraftmessung. Es wird heute noch als Instrument bei Demonstrationsversuchen verwendet.

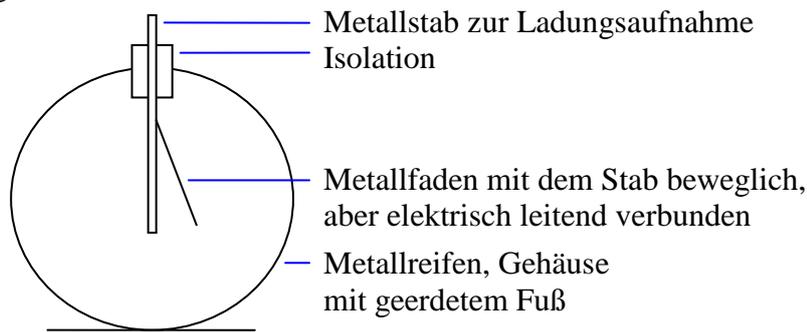


Abb. 3.6: Elektrometer

Die gleichartigen Ladungen auf dem Stab und dem Faden erfahren einander abstoßende Kräfte, außerdem wird der Faden von den entgegengesetzten Ladungen des Reifens angezogen. Mit den gegebenen Parametern der Anordnung lässt sich die Ladungsmenge auf dem Stab (oder die Spannung zwischen Stab und Reifen, siehe Abschnitt 4) ermitteln.

Messung des elektrischen Stromes

Zur Messung des Stromes muss der gesamte Strom durch den Strommesser (Amperemeter) fließen. Dazu ist das Amperemeter mit dem Verbraucher in Reihe zu schalten.

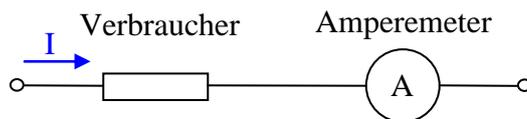


Abb. 3.7: Schaltung für eine Strommessung

Elektromechanische Amperemeter nutzen magnetische Kräfte des Stromes für einen Zeigerausschlag (siehe Abschnitt 5). Elektronische Messgeräte messen die Spannung an einem bekannten Verbraucher (Shunt), verstärken diese und zeigen in der Regel einen digitalen Stromwert an (siehe AEP II). Stromwandler und Stromzangen nutzen zusätzlich eine magnetische Übertragung und Wandlung (siehe Abschnitt 5). In jedem Fall erfolgt durch das Amperemeter ein kleiner Energieverbrauch und somit ein Spannungsverlust. Bei guten Amperemetern kann dieser Spannungsverlust aus dem angezeigten Strom und dem angegebenen Innenwiderstand des Amperemeters berechnet werden (zur Fehlerkorrektur).

Messung der elektrischen Spannung

Zur Messung der elektrischen Spannung, die ein Verbraucher zwischen zwei Punkten abnimmt (oder abnehmen könnte), muss an diese beiden Punkte – parallel zum Verbraucher – ein Spannungsmesser (Voltmeter) angeschlossen werden.

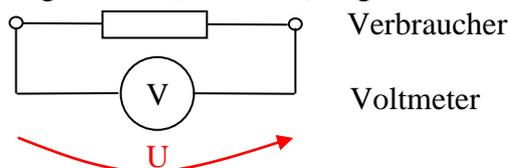


Abb. 3.8: Schaltung für eine Spannungsmessung

Auch wenn durch das Voltmeter nur eine sehr kleine Ladungsmenge fließt (Strom), ergibt $U = \Delta W_{\text{Abgabe}} / Q$ zwischen den beiden Punkten den gleichen Wert wie am Verbraucher.

Elektromechanische Voltmeter nutzen magnetische Kräfte des kleinen Stromes für einen Zeigerausschlag (siehe Abschnitt 5). Elektronische Messgeräte messen die Spannung, verstärken diese und zeigen in der Regel einen digitalen Spannungswert an (siehe AEP II). Spannungswandler nutzen zusätzlich eine magnetische Übertragung und Wandlung (siehe Abschnitt 5). In jedem Fall erfolgt durch das Voltmeter ein kleiner Energieverbrauch (hier gegenüber dem Verbraucher ein Stromverlust). Bei guten Voltmetern kann dieser Verlust aus der angezeigten Spannung und dem angegebenen Innenwiderstand des Voltmeters berechnet werden (zur Fehlerkorrektur). Heutige Multimeter haben einen Innenwiderstand, der bei einem Volt nur $0,1 \mu\text{A}$ vom Strom „abzweigt“ (ein Fehler unterhalb der Messauflösung für einen Strom durch das gleiche Instrument). Bei Nutzung von Elektrometervverstärkern (siehe AEP II) kann dieser Wert 10^6 - bis 10^7 -mal kleiner sein, das ist insbesondere für Ladungsmessungen wesentlich.

3.1.3 Übungsaufgaben zur Verdeutlichung praktischer Größenordnungen

Aufgabe 3.1.1

Gegeben ist ein elektrischer Leiter (Abb. 3.9) aus Kupfer, Querschnitt 1 mm^2 , Strom 1 A für die Dauer von 1 h . Das entspricht mit etwas gerundeten Zahlen einer Hausinstallation für eine Leuchte mit zwei Glühlampen von je 100 W .

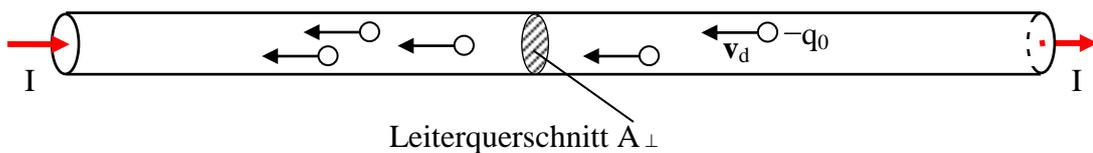


Abb. 3.9 Stromdurchflossener Leiter

- Frage 1: Welche Ladungsmenge und wie viele Elektronen sind durch den Leiter geflossen?
 Frage 2: Wie viele Elektronen stehen pro cm^3 Kupfer für die Leitung zur Verfügung und wie groß ist die Raumladungsdichte?
 (Hinweise: Die spezifische Masse von Kupfer ist $\gamma=8,93 \text{ g/cm}^3$. Die Masse eines Kupferatoms beträgt $m_{\text{Cu}}=106 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ (relative Atommasse/Avogadro'sche Zahl). Bei Kupfer steht in sehr guter Näherung bei Raumtemperatur pro Atom ein Valenzelektron für eine freie Bewegung zur Verfügung.)
 Frage 3: Wie groß ist die Stromdichte im Leiter?
 Frage 4: Wie schnell driften diese Elektronen durch den Leiter?

Aufgabe 3.1.2

Eine Hochspannungsleitung 110 kV ist gerissen und liegt waagrecht auf dem Boden.

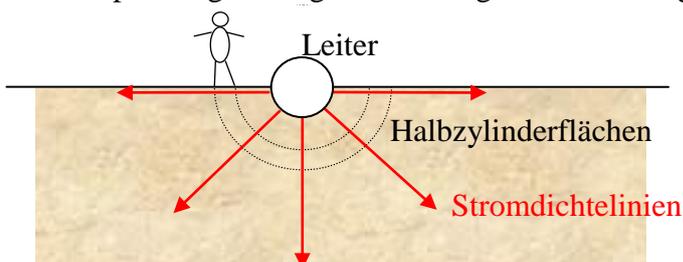


Abb. 3.10: Querschnittszeichnung eines auf dem Erdboden liegenden Leiters

Pro einem Meter Länge fließt ein Strom von ca. 100 A in den Boden (Leitfähigkeit für Erde $\kappa \approx 10^{-2}$ A/Vm, Luft nicht leitend). Das Leiterseil hat einen Durchmesser von 2 cm und ist näherungsweise zur Hälfte in den Boden eingesunken (siehe Abb. 3.10).

- Frage 1: Wie groß sind die Stromdichte und die elektrische Feldstärke auf einer Halbzylinderfläche in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?
 Frage 2: Wie groß ist die Schrittspannung für einen Menschen (bei 0,5 m Abstand der Füße) in Abhängigkeit von der Entfernung vom Leitermittelpunkt?
 (Hinweis: **S** und **E** zeigen in radiale Richtung, d.h., die Integration des Feldes ist in radiale Richtung auszuführen.)

Darstellung der Ergebnisse als Diagramm über dem Radius!

3.1.4 Wichtige Formen und Kenngrößen

Beispiele für häufige Stromformen

Bei der praktischen Nutzung, beim Messen und bei der mathematischen Behandlung benötigen die verschiedenen Stromformen (Abb. 3.11) ein unterschiedliches Herangehen.

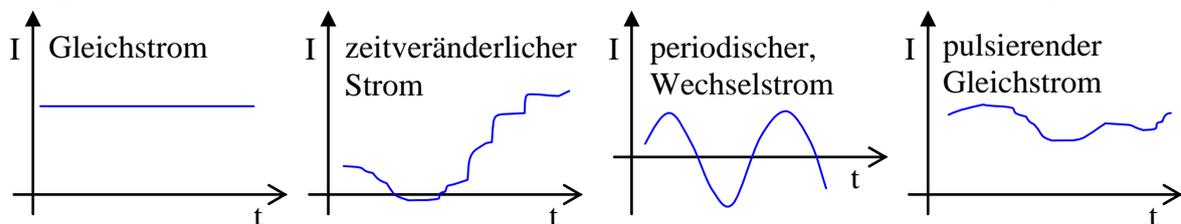


Abb. 3.11: Beispiele wichtiger Stromformen

Zum Verständnis sind die Abschnitte 4 und 5 erforderlich. Eine ausführliche Analyse erfolgt in AEP III.

Beispiele für wichtige Stromkennwerte

- Nennstrom – Strom für Normalbetrieb, für den das Gerät ausgelegt wurde.
- Maximalstrom – Ein größerer Strom führt zur Überlastung und ev. Zerstörung. (Hierzu wird oft eine einzuhaltende maximale Dauer angegeben, es können auch mehrere Stromwerte mit unterschiedlicher Dauer sein.)
- Schaltstrom – Strom, den ein entsprechendes Bauteil zum Schalten benötigt.

Beispiele für wichtige Spannungskennwerte

- Nennspannung – Spannung für Normalbetrieb, für den das Gerät ausgelegt wurde.
- Maximalspannung – Spannung, bis zu der ein Gerät betrieben werden darf.
- Prüfspannung – Spannung, bis zu der ein Gerät auf Sicherheit geprüft wurde.
- Durchschlagsspannung – Spannung, bei der ein Bauteil durch einen Spannungsdurchschlag zerstört wird.
- Schaltspannung – Spannung, bei der ein entsprechendes Bauteil seinen Schaltzustand ändert.

Die Beispiele sollen zeigen, dass eine genaue Kenntnis der Definition solcher Kennwerte erforderlich ist, wenn Geräte oder Bauteile beurteilt und in Betrieb genommen werden.

3.1.5 Messung und Darstellung von Feldern in leitenden Medien – Feldlinien

Zur Darstellung und Veranschaulichung von Feldern hat insbesondere Faraday den Begriff der Feldlinien benutzt. Hier soll dieser Begriff durch Messungen am elektrolytischen Trog verdeutlicht werden. Der elektrolytische Trog war etwa bis in die sechziger Jahre des vorigen Jahrhunderts eine wichtige Forschungsmethode, die dann durch die Möglichkeiten der Methode der finiten Elemente in Zusammenhang mit entsprechend leistungsfähigen Rechnern in den Hintergrund trat. Heute bietet der elektrolytische Trog den einfachsten Weg, Felder mit im normalen Labor vorhandenen Messgeräten zu messen und darzustellen.

Versuchsaufbau:

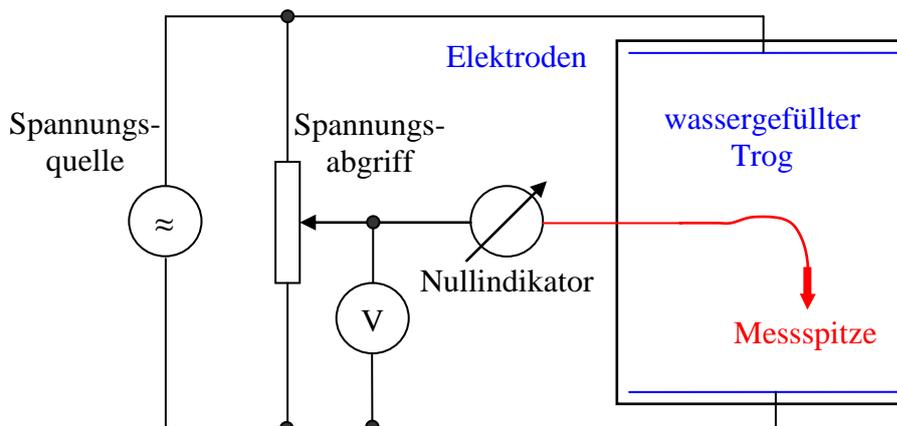


Abb. 3.12: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus (Draufsicht)

Es ist darauf zu achten, dass der Trog aus nicht leitendem Material waagrecht aufgestellt wird und somit überall einen **gleichen** Wasserstand von ca. 1 cm hat. Auf dem Boden muss wasserfestes Millimeterpapier angebracht sein. Als Spannungsquelle wird ein Funktionsgenerator mit einer Sinusspannung (von ca. 800 Hz und z.B. $U=10\text{ V}$) genutzt.

(Hinweise: Leitungswasser hat eine ausreichende Leitfähigkeit. Wechselstrom vermeidet Elektrolyse. 800 Hz können gut verstärkt oder einfach mit einem Oszilloskop als Nullindikator angezeigt werden. Auf ev. Erdklemmen an den Geräten ist zu achten.)

(Dieser Aufbau entspricht einer herausgeschnittenen Scheibe aus einer Anordnung, die nach oben und unten unendlich fortgesetzt wäre.)

Versuchsdurchführung:

Durch den Stellwiderstand wird eine Teilspannung der Quelle abgegriffen. Mit der Messspitze werden mit Hilfe des Nullindikators auf dem Millimeterpapier Linien gleicher Spannung (Äquipotentiallinien) gesucht und in einer Zeichnung festgehalten.

(Hinweise: Eine Darstellung gibt nur bei ausgewählten Äquipotentiallinien ein sinnvolles Bild vom Feld der Anordnung. Ausgewählte Linien entsprechen einer Einteilung der Spannung der Quelle in eine ganze Anzahl Teilspannungen mit gleichem Spannungsabstand. Dabei sind Symmetrielinien einzubeziehen.)

Das Feld wird für folgende Elektrodenanordnungen ermittelt:

1. Parallele Plattenelektroden
2. Parallele Plattenelektroden mit einem leitenden Ring symmetrisch zwischen den Elektroden (Metallring)

3. Parallele Plattenelektroden mit einer nicht leitenden Kreisscheibe symmetrisch zwischen den Elektroden
4. Einem Leiter mit einer scharfen 90^0 -Ecke sowie einer gerundeter 90^0 -Ecke
5. Einer Anordnung entsprechend Aufgabe 3.1.2 (Die größtmögliche Außenelektrode ist so anzuordnen, dass sie einer Äquipotentiallinie entspricht, d.h. coaxialer Halbkreis zum Halbkreis des Leiterseils.)

Hilfsmittel zur Vervollständigung der Feldbilder:

Da die Stromdichte in jedem Punkt des Feldbildes senkrecht auf den Äquipotentiallinien steht (Spannung fällt entlang des Stromes ab), können nach der Methode der quadratähnlichen Figuren ausgewählte Stromdichtelinien nach „Augenmaß“ gezeichnet werden. Diese Methode ist am einfachsten bei der 1. Elektrodenanordnung auszuführen, weil nur parallele Geraden auftreten (Die senkrechten Geraden der Stromdichtelinien werden in der Anzahl so gewählt, dass Quadrate entstehen. Dabei Symmetrielinien einbeziehen.). Mit etwas Übung verfährt man bei den anderen Elektrodenanordnungen sinngemäß. Je dichter die Linien gewählt werden (Äquipotentiallinien und Stromdichtelinien gleichsam z.B. verdoppeln), desto einfacher erkennt man die Quadrate. Orientierung geben „ungestörte“ Bereiche und Symmetrielinien.

Auf diese Weise erhält man nicht nur eindrucksvolle Darstellungen der Feldbilder, sondern man kann z.B. in der 5. Elektrodenanordnung die Schrittspannung nach den gemessenen Äquipotentiallinien direkt mit der Rechnung (Aufgabe 3.1.2) vergleichen.

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Gut leitende Gegenstände und die Elektroden sind immer identisch mit einer Äquipotentiallinie (Das stellen Ausgleichsströme in diesen Leitern unmittelbar her.). Dadurch kann in dem leitenden Ring keinerlei Spannungsunterschied auftreten, der Ring ist feldfrei (Faraday'scher Käfig).
2. Äquipotentiallinien treffen immer senkrecht auf nicht leitende Begrenzungen. Begrenzungen ergeben somit immer die letzte Stromdichtelinie.
3. Der Strom bevorzugt den besser leitenden und den kürzeren Weg, nutzt aber, wenn auch in geringerem Maße, alle leitenden Bereiche. Er füllt immer den gesamten zur Verfügung stehenden Raum aus.
4. Bei Konstruktionen sind Anordnungen, wo sich der Strom (ungewollt) konzentriert, zu vermeiden (z.B. runde statt scharfe Ecken wählen).

Feldbilder gibt es in vielen Bereichen der Physik (Temperaturfelder, Druckfelder, Strömungsfelder bei Flüssigkeiten usw.), sie sind ein wichtiges Hilfsmittel, um diese Prozesse darzustellen und zu untersuchen.

3.2 Strom-Spannungs-Beziehung am Widerstand

3.2.1 Driftbewegung und Ohm'sches Gesetz

In leitenden Materialien können bewegliche Ladungsträger (Elektronen, evtl. Ionen) an der Stromleitung teilnehmen. Dazu müssen sie zwischen den feststehenden Atomen driften.

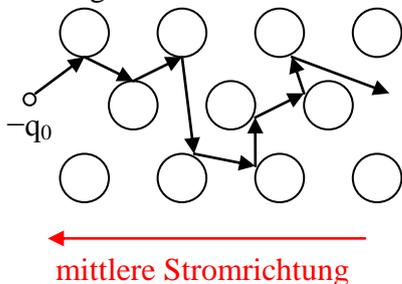


Abb. 3.13: Driftbewegung eines Elektrons im Leiter (vereinfacht)

Wie gut die Stromleitung erfolgen kann, hängt davon ab, wie viele bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen und von deren Beweglichkeit. Die Anzahl Ladungsträger wird durch Material, Temperatur, elektrische Felder, Lichteinstrahlung sowie weitere Faktoren beeinflusst. Die Beweglichkeit ist ebenfalls von Material, Temperatur und anderen Faktoren abhängig. (Siehe AEP II)

Aus Messungen von Strom und Spannung an Leitern verschiedener Materialien ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 3.14 linke Darstellung).

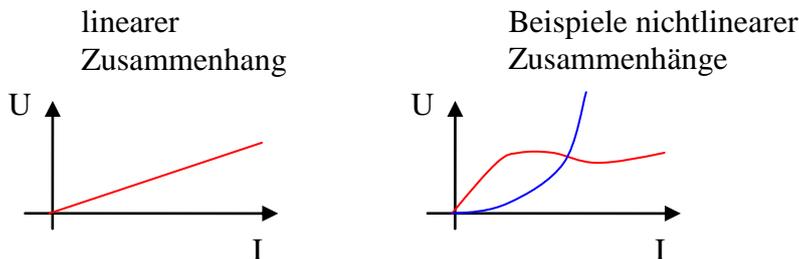


Abb. 3.14: Beispiele gemessener Strom-Spannungs-Kurven

Der größte Teil der technisch verwendeten Materialien hat einen linearen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, d.h. $U \sim I$ oder als Geradengleichung: $U = R \cdot I$ mit dem Proportionalitätsfaktor „R“. Dieser Proportionalitätsfaktor stellt einen Widerstand dar, den das Material dem Stromfluss entgegenstellt (größeres R mehr Energieverlust bei gleichem I).

Definition des elektrischen Widerstandes – Ohm'sches Gesetz

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } U = R I$$

(3.9)

Bei nichtlinearem Zusammenhang muss die Funktion $U = U(I)$ oder eine Funktion $R = R(U)$ bzw. $R = R(I)$ gefunden werden (je nachdem, was physikalisch sinnvoller ist).

Für einige Anwendungsbereiche ist es üblich, auch einen **Leitwert** zu definieren:

¹⁶ Die Maßeinheit V/A wird nach Ohm mit Ω bezeichnet.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \quad \text{nach} \quad I = G U \quad (3.10)$$

Für lineare Leiter mit homogener Stromverteilung (Abb. 3.15) kann eine Bemessungsgleichung für den Widerstand angegeben werden.

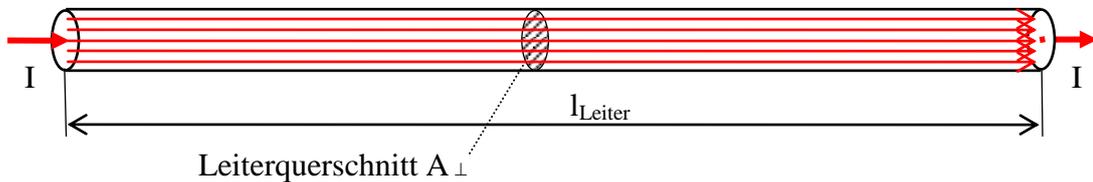


Abb. 3.15: Leiter mit homogener Stromverteilung

Bemessungsgleichung des elektrischen Widerstandes

$$R = \frac{l_{\text{Leiter}}}{\kappa A_{\perp}} = \frac{\rho l_{\text{Leiter}}}{A_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \rho = \text{spezifischer Widerstand} \\ \kappa = \text{spezifischer Leitwert} \end{array} \quad (3.11)$$

Liegt keine homogene Stromverteilung vor, wird der Leiter in kleine Leiterteile unterteilt, die jeweils so klein sind, dass dort in guter Näherung die Stromverteilung homogen ist, und anschließend der Gesamtwiderstand berechnet.

Sehr oft ist die Temperaturabhängigkeit eines Widerstandes zu beachten oder sie wird sogar genutzt. Auch dazu wird die Beschreibung aus einer Messkurve (Abb. 3.16) abgeleitet.

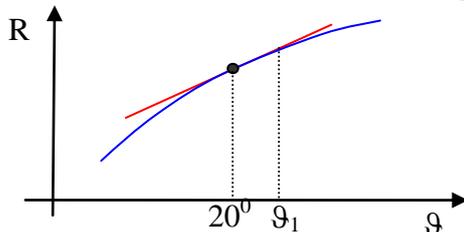


Abb. 3.16: Messkurve $R = f(\vartheta)$ und Näherung durch eine Gerade

Indem die Kurve $R = f(\vartheta)$ um den Bezugspunkt (Temperatur = 20^0) in einer Taylorreihe entwickelt und diese nach der ersten Ordnung abgebrochen wird, ergibt sich eine Näherung durch eine Gerade (Tangente im Bezugspunkt).

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

$$R_{\vartheta} = R_{20} (1 + \alpha_{20} \Delta\vartheta) \quad \text{mit} \quad \Delta\vartheta = \vartheta_1 - 20^0 \quad (3.12)$$

Darin sind R_{20} der Widerstandswert und α_{20} der Temperaturkoeffizient (steht für den Anstieg der Geraden) und werden jeweils im Bezugspunkt bei 20^0 bestimmt. Für einige Anwendungen ist es sinnvoll, einen anderen Bezugspunkt zu wählen. Bei sehr großen Temperaturbereichen wird die zweite Ordnung der Taylorreihe ($\beta_{20}\Delta\vartheta^2$) hinzugezogen. (β_{20} steht für die Änderung des Anstieges im Bezugspunkt.) Die Temperaturkoeffizienten sind für viele Materialien in Tabellenbüchern gesammelt.

¹⁷ Die Maßeinheit $A/V=1/\Omega$ wird nach Siemens mit S bezeichnet.

¹⁸ Die Maßeinheit von ρ wird für die praktische Anwendung sinnvoll mit $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ angegeben.

3.2.2 Bauformen und Kenngrößen

Widerstände müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Widerstandswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite Wichtige ist die Leistung, die als Wärme abgeführt werden können muss (bei einigen Bauformen steht an dieser Stelle auch die maximale Strombelastung).

Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität
- Baugröße und -form
- Kapazität der Kappen und Wicklungen oder Induktivität von Wicklung und Leitungen (siehe Abschnitte 4 und 5) Abb. 3.17
- Spannungsfestigkeit bei Hochspannungseinsatz oder
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen

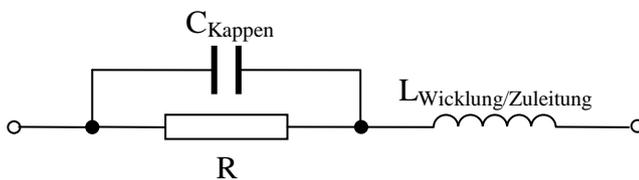


Abb. 3.17: Ersatzschaltbild Widerstand mit parasitärer Kapazität und Induktivität

In Abb. 3.18 sind einige Beispiele für grundlegende Bauformen abgebildet.

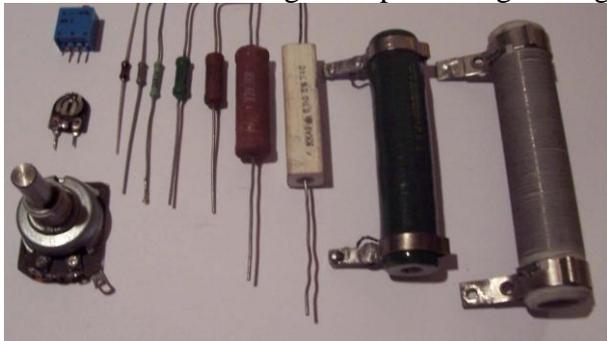


Abb. 3.18: Verschiedene Widerstände

Links von oben nach unten: Präzisionseinstellregler, Miniatureinstellregler, Potentiometer,
weiter von links nach rechts: 1/20 bis 1/2 W Kohleschichtwiderstände 4 Größen
1 bis 12 W Drahtwiderstände (teils nicht umhüllt)

Als Beispiel für Spezialbauformen seien Vierleiterwiderstände genannt. Bei diesen befinden sich unmittelbar am justierten Teil des Widerstandes zwei zusätzliche Anschlussdrähte für eine genaue belastungsunabhängige Spannungsmessung (z.B. bei Präzisionsmesswiderständen und Shunts).

3.2.3 Messung von Widerständen

Der Widerstandswert kann durch eine Messung von Strom und Spannung ermittelt werden (entsprechend seiner Definitionsgleichung).

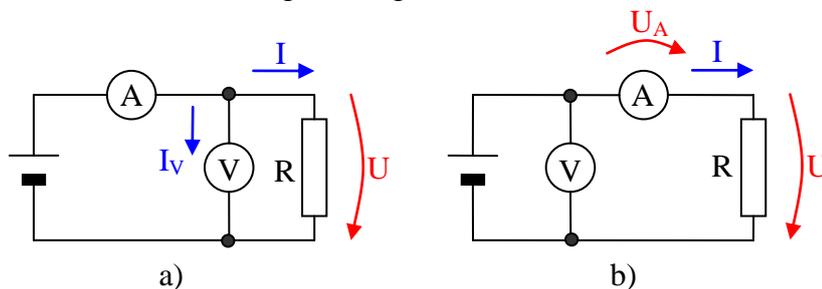


Abb. 3.19: Strom- und Spannungsmessung

Die Darstellung (Abb. 3.19) zeigt, dass im Fall

- a) der Strom $I_m = I_V + I$ gemessen wird, während die Spannung U richtig gemessen wird, und
- b) der Strom I richtig gemessen wird, aber die Spannung $U_m = U_A + U$ gemessen wird.

Man wählt die Schaltung von beiden, für die entweder I_V oder U_A zu einem vernachlässigbaren Fehler führt. Wird der Fehler zu groß, kann bei

- a) aus dem richtig gemessenen U (bei bekanntem Widerstand R_V des Voltmeters) I_V errechnet und der Strom korrigiert werden ($I = I_m - U/R_V$) bzw. bei
- b) aus dem richtig gemessenen I (bei bekanntem Widerstand R_A des Amperemeters) U_A errechnet und die Spannung korrigiert werden ($U = U_m - I R_A$).

Eine in der Regel genauere (aber aufwendigere) Variante stellt die Vergleichsmethode dar. Dazu kann eine Wheatston'sche Brückenschaltung benutzt werden (Abb. 3.20).

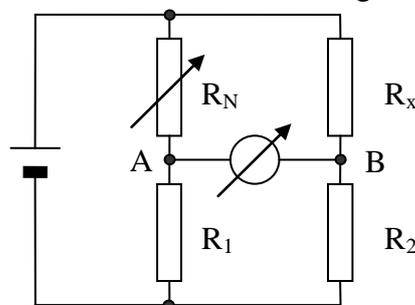


Abb. 3.20: Wheatston'sche Messbrücke

Mit Hilfe des Normalwiderstandes R_N und des empfindlichen Messinstruments wird der Brückenstrom auf „Null“ abgeglichen. Fließt kein Strom zwischen A und B, kann zwischen A und B kein Spannungsunterschied bestehen und es gilt:

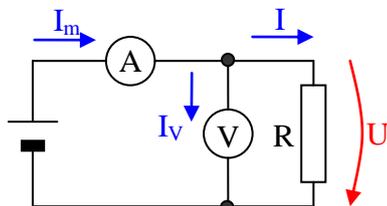
$$\frac{R_N}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \quad \text{d.h.} \quad R_x = R_2 \frac{R_N}{R_1} \quad (3.13)$$

Das Verhältnis von R_1 und R_2 ist bekannt, der Normalwiderstand kann genau abgelesen werden. Die Genauigkeit hängt nur von der Exaktheit des Normalwiderstands und des Widerstandsverhältnisses R_2/R_1 ab.

3.2.4 Übungsaufgaben zum Widerstand

Aufgabe 3.2.1

Mit der Schaltung von Abb. 3.21 werden folgende Werte gemessen:



$$I_m = 0,11 \text{ A}$$

$$U = 100 \text{ V}$$

Gegeben ist zusätzlich:

$$R_V = 10 \text{ k}\Omega$$

Frage: Wie groß sind R und G?

Abb. 3.21: Messanordnung

Aufgabe 3.2.2

Zwei Adern eines Telefonkabels mit einem Durchmesser von je 0,3 mm bestehen aus Kupfer mit $\kappa = 56 \text{ m}/\Omega\text{mm}^2$ und haben einen Kurzschluss bei einem Widerstand von 2 k Ω .

Frage: Wie lang ist eine Ader, in welcher Entfernung liegt der Fehler?

Aufgabe 3.2.3

Die Temperatur verändert sich von 20° auf 40°. Für Kupfer ist $\alpha_{20} = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Frage 1: Wie ändert sich der Widerstand von Aufgabe 3.2.2 bei gleicher Entfernung?

Frage 2: Welche Entfernungsdifferenz entsteht mit dem gemessenen Widerstandswert 2 k Ω , wenn statt 40° bei Berechnung der Entfernung 20° angenommen werden?

Aufgabe 3.2.4

Das gleiche Kabel von Aufgabe 4.2.2 wird zum Anschluss eines Lautsprechers mit 4 Ω benutzt, der 50 m von der Bühne entfernt ist.

Frage: Welcher Widerstand kommt zu den 4 Ω dazu und verringert damit den Strom?

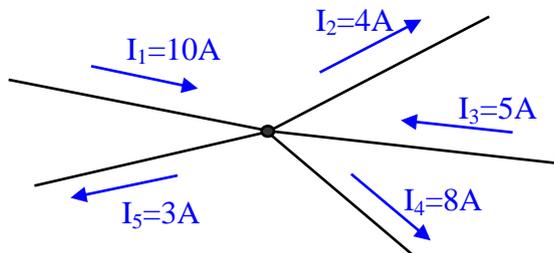
3.3 Kirchhoff'sche Sätze sowie Reihen- und Parallelschaltung

3.3.1 Knotenpunkt und Maschensatz

Der Strom war in (3.1) als Ladung pro Zeiteinheit definiert worden. Da Ladungen in der Natur weder „erschaffen“ werden noch „verschwinden“ können, müssen so viele Ladungen, wie zu einem Ort hin fließen, auch wieder abfließen. In Anordnungen, die Ladungen speichern können, kann zusätzlich eine Änderung der gespeicherten Ladungsmenge auftreten. An einem Verbindungspunkt – Knotenpunkt – elektrischer Leiter, wo normalerweise keine Ladungen gespeichert werden, kann demzufolge als Bilanz aufgestellt werden:

Knotenpunktsatz von Kirchhoff

$$\sum_{\uparrow} I_v = \sum_{\downarrow} I_{\mu} \quad \text{mit } I_v \text{ alle zufließenden und } I_{\mu} \text{ alle abfließenden Ströme} \quad (3.14)$$



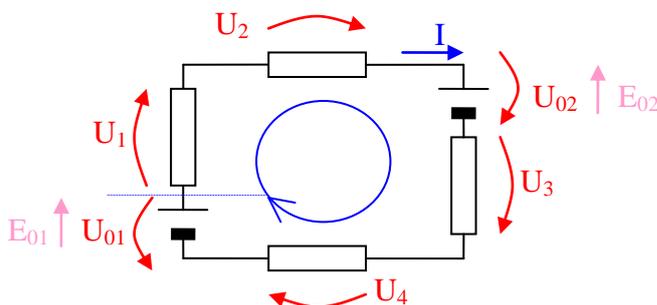
$$15 \text{ A} = I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5 = 15 \text{ A}$$

Abb. 3.22: Beispiel für einen Knotenpunkt (Teil einer Schaltung)

Eine weitere Bilanz kann nach den Darlegungen zu Abb. 3.4 aufgestellt werden. So muss entlang eines geschlossenen Kreislaufes die Summe aller Spannungsabfälle ($U = \Delta W_{\text{Abgabe}} / Q_p$) zu „Null“ werden. (Bzw. Summe der Urspannungen ist gleich Summe der Spannungsabfälle.)

Maschensatz von Kirchhoff

$$\sum U_v = 0 \quad \text{mit } U_v \text{ alle Spannungsabfälle in gleichem Umlaufsinn} \quad (3.15)$$



$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - U_{01} = 0$$

Abb. 3.23: Beispiel für eine Masche (Teil einer Schaltung)

In Richtung des Umlaufsinn (im Beispiel von Abb. 3.23 blau skizziert) wird die Masche von einem Anfangspunkt an genau einmal umlaufen. Dabei werden alle Spannungen, deren Richtung mit dem Umlaufsinn übereinstimmt, positiv, die anderen negativ (im Beispiel nur U_{01}) summiert. (U_{01} und U_{02} werden an den Klemmen der Quelle außen gemessen.)

Die beiden Kirchhoff'schen Sätze gelten ohne jede Einschränkung.

3.3.2 Parallel- und Reihenschaltung, Strom- und Spannungsteilung

Bei einer Reihenschaltung (Abb. 3.24) fließt durch alle Widerstände **derselbe Strom**. Diese Tatsache kann auch zum Test, ob eine reine Reihenschaltung vorliegt, benutzt werden.

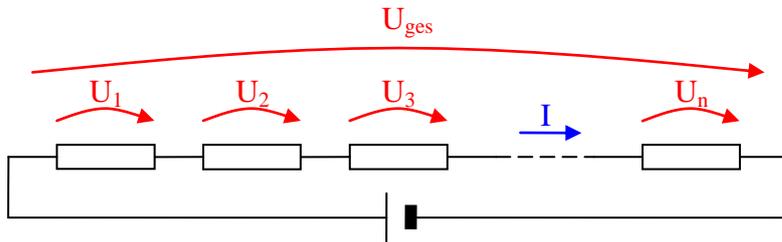


Abb. 3.24: Reihenschaltung von Widerständen

Für denselben Strom mit dem Maschensatz geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U_{\text{ges}} &= U_1 + U_2 + U_3 \dots + U_n \quad | : I \\ R_{\text{ges}} &= R_1 + R_2 + R_3 \dots + R_n \end{aligned} \quad (\text{mit } R = U / I) \quad (3.16)$$

und ferner

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3} \dots = \frac{U_n}{R_n} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} \quad (3.17)$$

Aus (3.16) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung von Widerständen:

Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = \sum_v R_v \quad (3.18)$$

Aus (3.17) kann die Aufteilung der Spannung auf die Widerstände einer Reihenschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} \quad (3.19)$$

In (3.19) wird als Beispiel das Verhältnis von U_1 zu U_{ges} gezeigt. Die Spannungen teilen sich wie das Verhältnis der Widerstände auf.

Bei einer Parallelschaltung (Abb. 3.25) liegt an allen Widerständen **dieselbe Spannung**. Diese Tatsache kann wiederum zum Test, ob eine reine Parallelschaltung vorliegt, benutzt werden.

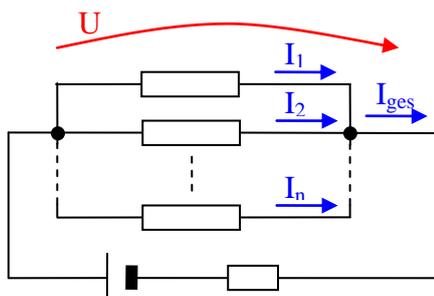


Abb. 3.25: Parallelschaltung von Widerständen

Für dieselbe Spannung kann mit dem Knotenpunktsatz geschrieben werden:

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_n \quad | : U \\ G_{\text{ges}} &= G_1 + G_2 + G_3 \dots + G_n \end{aligned} \quad (\text{mit } G = 1 / R = I / U) \quad (3.20)$$

und ferner

$$U = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \frac{I_3}{G_3} \dots = \frac{I_n}{G_n} = \frac{I_{\text{ges}}}{G_{\text{ges}}} . \quad (3.21)$$

Aus (3.20) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Widerständen:

Parallelschaltung von Widerständen

$$G_{\text{ges}} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{\nu} \frac{1}{R_{\nu}} = \sum_{\nu} G_{\nu} . \quad (3.22)$$

Aus (3.21) kann die Aufteilung des Stromes auf die Widerstände einer Parallelschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Stromteilerregel bei Parallelschaltung

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \quad (3.23)$$

In (3.23) wird als Beispiel das Verhältnis von I_1 zu I_{ges} gezeigt. Die Ströme teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Widerstände auf.

Die hier gezeigten Zusammenhänge entstanden durch die Anwendung des Maschen- und des Knotenpunktsatzes auf die beiden einfachsten Schaltungsvarianten. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Berechnung elektrischer Schaltungen und Netzwerke. Da zur Ableitung das Ohm'sche Gesetz genutzt wurde, ist die Anwendung auf **lineare Bauelemente** beschränkt bzw. nur für diese sinnvoll.

3.3.3 Übungsaufgaben zu einigen praktischen Anwendungen

Aufgabe 3.3.1

Es soll die Zeitfunktion einer Spannung mit einem Maximalwert von 3000 V mit einem Oszilloskop dargestellt werden (z.B. bei einer Funkenentladung). Das Oszilloskop kann eine maximale Eingangsspannung von 400 V darstellen und hat dabei einen Eingangswiderstand von 10 MΩ.

Frage 1: Welcher Widerstand muss in Reihe zum Eingang geschaltet werden, damit am Eingang des Oszilloskops nur 300 V anliegen?

Frage 2: Vorhandene 10 MΩ Widerstände haben eine Bauform mit einer Länge von ca. 1 cm. Es sollen, um einen Überschlagn sicher zu vermeiden, mindestens 8 cm für den Spannungsabfall zur Verfügung stehen. Welche Schaltung und räumliche Anordnung sind zu wählen?

Aufgabe 3.3.2

Für einen Test zur Entladung einer Autobatterie von 12 V soll als Verbraucher ein Widerstand von $6\ \Omega$ eingesetzt werden. Vorhanden sind $4\ \Omega$ Widerstände, die im Dauerbetrieb Wärme bis zu einem Maximalstrom von 1 A abführen können.

Frage: Welche Schaltung ist zu wählen und wie viele Widerstände werden benötigt?

Aufgabe 3.3.3

Bei einer Schaltung (Schaltungsdetail in Abb. 3.26) soll am $100\ \text{k}\Omega$ Widerstand die Spannung gemessen werden. Es steht ein Multimeter mit $10\ \text{k}\Omega/\text{V}$ Eingangswiderstand und einem 10-V-Messbereich (ein etwas älterer Typ) zur Verfügung.

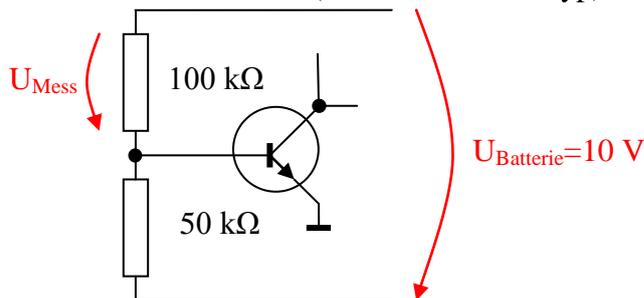


Abb. 3.26: Schaltungsdetail

Frage 1: Welcher Messfehler ist zu erwarten?

(Hinweis: Zuerst die Spannung ohne Messgerät berechnen, dann mit Messgerät.)

Frage 2: Welcher Messfehler ist mit einem Multimeter mit messbereichsunabhängigem Eingangswiderstand von $10\ \text{M}\Omega$ (heute Standard) zu erwarten?

3.4 Energieumwandlung und Leistung

3.4.1 Energie, Leistung und Wirkungsgrad

Die Energie, die an einem elektrischen Verbraucher umgewandelt wird, folgt direkt aus der Umkehrung der Definition der Spannung (3.6).

Verbrauch elektrischer Energie

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} U dQ = \int_{t_1}^{t_2} U I dt \quad {}^{19} \quad \text{oder} \quad W = U I t_{12} \quad \text{für } U \text{ und } I \text{ const} \quad (3.24)$$

Wird an einer Quelle wie an einem Verbraucher gemessen (z.B. bei einem Straßenbahnmotor, der beim Bremsen als Generator fungiert), wird die Energie negativ. Das entspricht der Richtungsumkehr der Energieumwandlung (vergleiche Abb. 3.4).

Die Leistung als Arbeit (Energie) pro Zeit ist in der Elektrotechnik eine der wichtigsten Kenngrößen.

Verbrauch elektrischer Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = U I \quad {}^{20} \quad \text{auch als } p(t) = u(t) i(t) \quad (3.25)$$

Zusammen mit dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich für einen Widerstand mit zeitkonstantem U und I:

$$P = I^2 R = U^2 / R$$

Mit der Leistung ist eine weitere wichtige technische Kenngröße verbunden: der Wirkungsgrad. Darin beschreibt P_{ab} die abgegebene Leistung, die genutzt werden kann, und P_{zu} die Leistung, die zugeführt werden muss. Beide Leistungen sind in der Regel von verschiedenen Energieformen (Z.B. mechanisch \rightarrow elektrisch, elektrisch \rightarrow Wärme usw.).

Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad (3.26)$$

Ein sehr großer Teil der Aufgaben der Elektrotechnik besteht in einer Energieumwandlung. Dabei lässt sich Elektroenergie sehr elegant in praktisch jede Energie wandeln. Um diese Prozesse richtig verstehen und handhaben zu können, müssen auch entsprechende Kenntnisse der anderen Energieformen und deren Messung, deren Problemstellungen, deren Handhabung usw. vorliegen; z.B. Antriebsfragen bei der mechanischen Energie, Wärmespeicherung, -strahlung und -leitung bei der Wärmeenergie, Beleuchtungstechnik beim Licht, Batterien, Akkumulatoren und Elektrolyse bei chemischer Energie usw. Darlegungen dazu sind der Literatur z.B. [9] zu entnehmen.

¹⁹ Die Maßeinheit ist Nm=Ws=VA.s.

²⁰ Die Maßeinheit ist Nm/s=W nach Watt benannt.

3.4.2 Messung von Energie und Leistung

Sind Strom und Spannung zeitkonstant, reichen eine Strommessung, eine Spannungsmessung und eine Zeitmessung, um Energie, Leistung und Wirkungsgrad zu ermitteln.

In der Regel sind die Bedingungen ungünstiger.

Zur Messung der **Energie** muss dann das Integral von (3.24) gebildet werden. Das leistet jeder Energiezähler im Haushalt (neue Geräte elektronisch, ältere elektromechanisch).

Soll die **Leistung** $p(t)$ gemessen werden, muss das Produkt in (3.25) gebildet werden. Das realisieren ebenfalls neue Geräte elektronisch, ältere elektromechanisch.

Sowohl bei der Leistungsmessung als auch bei der Energiemessung muss das Messgerät gleichzeitig Strom und Spannung auswerten, es ist also wie ein Strommesser **und** ein Spannungsmesser anzuschließen (Abb. 3.27).

Messung der elektrischen Leistung

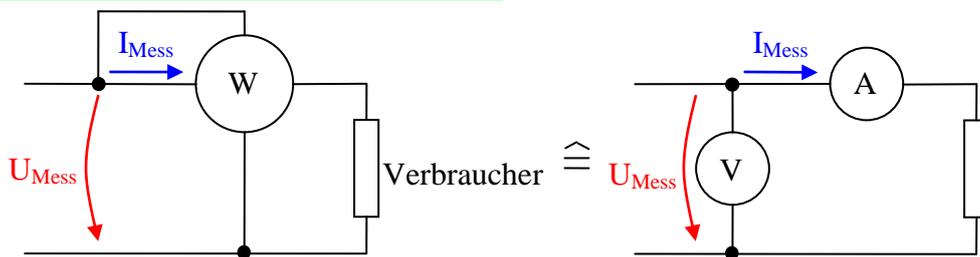


Abb. 3.27: Anschluss eines Wattmeters und Einzeldarstellung des Strom- und Spannungspfad für diese Schaltung

Die gezeigte Schaltung entspricht also einer stromrichtigen Messung. Die Eichung des Wattmeters berücksichtigt aber diesen Fehler.

Messung der elektrischen Energie

Ein Energiezähler wird genauso angeschlossen wie der Leistungsmesser, nur dass er intern noch das Zeitintegral bildet (oder eben zählt).

Weil $p(t)$ zu jedem Zeitpunkt einen anderen Wert besitzt und damit wenig aussagefähig ist, wurden für wichtige Stromarten andere Parameter geschaffen. Für periodische, so auch für rein sinusförmige Ströme und Spannungen (wie im Energienetz) wird die mittlere Leistung (genannt Wirkleistung) genutzt. Gemittelt wird über eine Periode der Spannung.

Wirkleistung (physikalisch real)

$$P_w = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

(3.27)

Diesen Mittelwert bilden elektromechanische Messgeräte auf Grund ihrer mechanischen Trägheit gleich mit, bei elektronischen wird dieses zusätzlich realisiert. Die Wirkleistung kann aber „Null“ werden, obwohl Ströme fließen und Spannungen anliegen, sie reicht zur Bewertung also nicht immer aus. Bei **rein sinusförmigen Strömen** tritt dies z.B. ein, wenn die Sinusfunktionen von Strom und Spannung um genau 90° verschoben sind (Abb. 3.28). Die Rechnung zeigt:

$$P_w = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U} \sin(\omega t) \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi).$$

(3.28)

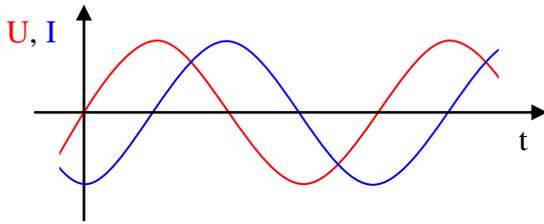


Abb. 3.28: Sinusförmige Spannung und um 90° verschobener Strom

Dabei ist $\cos(90^\circ) = 0$. Es wäre aber $\sin(90^\circ) = 1$. Eine mit $\sin(\varphi)$ definierte Blindleistung entspricht einer Leistung, die ständig zwischen Quelle und Verbraucher hin und her gespeichert wird, ohne verbraucht zu werden (jeweils 90° lang sind Strom und Spannung gleich gepolt und die nächsten 90° entgegengesetzt, siehe Abb. 3.28). Das ist eine nützliche Kenngröße.

Definition von Blindleistung und Scheinleistung

$$P_b = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad P_s = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \quad \text{mit} \quad P_s^2 = P_w^2 + P_b^2 \quad (3.29)$$

Hierbei gibt die Scheinleistung Auskunft über die maximal auftretende Belastung. Da der $\cos(\varphi)$ gerade den Anteil der Wirkleistung wiedergibt, wird er als Leistungsfaktor (mit der Bezeichnung „ $\cos\varphi$ “) benutzt.

Definition des Leistungsfaktors

$$\cos \varphi = \cos\langle u(t), i(t) \rangle \quad (3.30)$$

Achtung: Zu beachten ist, dass Blindleistung, Scheinleistung und $\cos\varphi$ nur für rein sinusförmige Ströme und Spannungen definiert und so anwendbar sind sowie entsprechende Messgeräte auch nur dafür aussagefähig sind oder benutzt werden können.²¹

Die Wirkleistung gibt uns die Möglichkeit, für periodische (und auch für rein sinusförmige) Ströme und Spannungen bessere Kennwerte zu definieren. Diese sollen eine **äquivalente Aussagefähigkeit** haben wie die Messwerte von Gleichstrom (bei gleich großen Werten für U bzw. I) **in Bezug auf die Leistung**. Dazu dient der quadratische Mittelwert.

Definition des Effektivwertes

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad \text{und für Sinusspannung} \quad U_{\text{eff}} = \hat{U} / \sqrt{2}$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad \text{und für Sinusstrom} \quad I_{\text{eff}} = \hat{I} / \sqrt{2} \quad (3.31)$$

Es werden:

$P_s = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$	$= \hat{U} \hat{I} / 2$	bei Sinusform,
$P_w = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$	$= (\hat{U} \hat{I} / 2) \cos\varphi$	bei Sinusform und
$P_b = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin\varphi$	$= (\hat{U} \hat{I} / 2) \sin\varphi$	bei Sinusform.

²¹ Für nichtsinusförmige periodische Größen werden ähnliche erweiterte Definitionen bereitgestellt.

Heute gibt es preisgünstige Messgeräte, die diese Definitionen elektronisch realisieren. Ältere Geräte haben nur den arithmetischen Mittelwert des gleichgerichteten Zeitverlaufs gebildet (mittels der mechanischen Trägheit oder elektronisch mit einem Tiefpass) und nur für reine Sinusform die Skala auf Effektivwerte umgeiecht. Es gibt auch elektromechanische Messgeräte (Dreheisenmesswerk), die echt einen Effektivwert bilden.

3.4.3 Übungsaufgaben zur Leistung

Aufgabe 3.4.1

Auf dem Typenschild eines Asynchronmotors sind u.a. folgende Angaben:

Nennspannung : 220/380 V

Nennstrom : 1,6/0,93 A

$\cos\varphi$: 0,78

Leistung : 0,33 kW

Frage: Wie groß sind die Wirkleistung (elektrisch), Blindleistung und der Wirkungsgrad? (Hinweis: Angaben sind Effektivwerte, die Leistung ist die nutzbare mechanische Leistung, die Rechnung müsste bei 220 V bzw. 380 V im Rahmen der Messgenauigkeit gleiche Ergebnisse liefern. Beachte die drei Phasen $3 \times 220V \cdot 0,93A$ oder $\sqrt{3} \times 220V \cdot 1,6A$ oder $\sqrt{3} \times 380V \cdot 0,93A$)

Aufgabe 3.4.2

Ein Widerstand von 470Ω ist für eine Wärmeabgabe von $1/8$ W im Dauerbetrieb ausgelegt.

Frage 1: Wie groß ist der maximale Strom in einer Gleichstromschaltung?

Frage 2: Wie groß ist der Effektivwert des maximalen Stromes bei Wechselstrom?

(Hinweis: Für einen Widerstand gilt $\cos\varphi=1$.)

Aufgabe 3.4.3

Eine 100 W Glühlampe hat einen Wirkungsgrad von 5 % und soll durch eine Energiesparlampe mit gleicher Lichtleistung ersetzt werden.

Frage: Welche elektrische Leistung muss die Energiesparlampe haben, wenn sie einen Wirkungsgrad von 25 % besitzt?

Zusatzfrage: Welche Leistung müsste ein LED-Array mit $\eta=40$ % haben?

Aufgabe 3.4.4

Ein Audioverstärker hat eine Ausgangsspannung von $U_{\text{eff}} = 20$ V. Es kann ein Lautsprecher mit einem Widerstand $R_L \geq 4 \Omega$ angeschlossen werden.

Frage 1: Welche Leistung kann maximal entnommen werden?

Frage 2: Welche Leistung kann von einem Lautsprecher mit 8Ω entnommen werden?

Frage 3: Wie sind zwei Lautsprecher mit je 8Ω anzuschließen?

4 Vorgänge in elektrischen Nichtleitern

4.1 Grundbegriffe für elektrische Größen im Nichtleiter

4.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung der Vorgänge in elektrischen Nichtleitern ist ebenfalls die **Naturgröße Ladung**, wie sie in Abschnitt 2 gezeigt wurde.

Im Nichtleiter können sich keine Ladungen bewegen, folglich werden die Vorgänge in einem Beobachtungssystem untersucht, in dem die Anordnung ruht.

Da sich am Rande eines Nichtleiters (Abb. 4.1) immer gleich viele positive und negative Ladungen „ansammeln“, muss es eine Verbindung zwischen ihnen geben. Der Schlüssel ist die Überlegung zur Nahwirkung in Abschnitt 2.

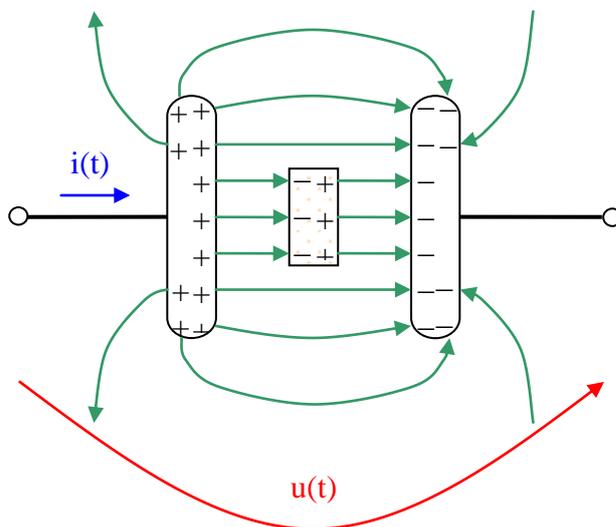


Abb. 4.1: Verbindung der Ladungen in einem Nichtleiter

Die Ladungen auf den Plattenelektroden teilen nach dem Prinzip der Nahwirkung ihren Gegenladungen ihre Ladungsmenge mit. Das erfolgt unabhängig vom dazwischen liegenden Nichtleitermaterial. Diese Mitteilung kann durch Influenz nachgewiesen und gemessen werden [10]²².

In einem leitenden Influenzkörper (in Abb. 4.1 in der Mitte abgebildet) wandert die entsprechende Menge Ladungen (bewegliche Elektronen) zur Oberfläche gegenüber der positiven Platte und es entsteht durch Überschuss bzw. Mangel jeweils eine Oberflächenladung.

Weil in Influenzkörpern Ladungen verschoben²³ werden, wird die Weitergabe dieser Mitteilung auch heute noch Verschiebungsfluss genannt. Der gesamte von einer Ladung ausgehende Verschiebungsfluss Ψ enthält genau die Information über die Menge der Ladung, von der er ausgeht bzw. an der er endet. Verschiebungsfluss besitzt eine Quelle (positive Ladungen) und eine Senke (negative Ladungen).

²² Da diese Methode nicht sehr praktikabel ist, erfolgt die Messung normalerweise über das Feld nach (4.4).

²³ Zu Zeiten der Äthertheorie waren mit Verschiebung weitere Vorstellungen verbunden.

Definition des Verschiebungsflusses Ψ mit

$$\Psi_{\text{ges}} = Q \quad (4.1)$$

Der nicht unbedingt gleichmäßige Verschiebungsfluss in den Raum, wird durch die Definition einer Verschiebungsflussdichte \mathbf{D} beschrieben (grüne Linien in Abb. 4.1).

Definition der Verschiebungsflussdichte

$$|\mathbf{D}| = \frac{d\Psi}{dA_{\perp}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = |\mathbf{D}| \mathbf{e}_{\Psi} \quad (4.2)$$

Dabei erfasst der Vektor \mathbf{D} den Anteil des Flusses Ψ , der durch ein senkrecht zu ihm stehendes Flächenelement (dA_{\perp} , Richtung \mathbf{e}_{Ψ}) tritt, und hat die Richtung der Ausbreitung der **Nahwirkung, welche hier als Fluss** erscheint. Es gilt demnach der Zusammenhang

$$\oint_{\text{Hüllfläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \Psi_{\text{gesamt}} \equiv Q \quad (4.3)$$

welcher zusätzlich zu (4.2) die Vorstellung über den Verschiebungsfluss im Sinne von (4.1) festlegt. In dieser Fassung des Verschiebungsflusses ist nicht enthalten, wie die Nahwirkung im Detail funktioniert. Es werden aber die räumliche Verteilung und die Verbindung jeder Ladung mit der gleichen Menge Gegenladungen wiedergegeben (in Betrag und Richtung in jedem Raumpunkt).

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes - dem elektrostatischen Feld.

Zur Beschreibung der **Kraftwirkungen** wird auch hier das **elektrische Feld** verwendet, wie es in Abschnitt 3.1.1 mit Gleichung (3.4) definiert wurde.

Auch der Begriff der **elektrischen Spannung** (und des Potentials) kann aus Abschnitt 3.1.1 Gleichung (3.6) übernommen werden.

Der Charakter der Spannung ist hierbei aber etwas anders zu sehen, weil sich keine Ladungen von Punkt P_1 nach P_2 bewegen (vergleiche Abb. 3.3). Dennoch haben zwei Probeladungen, die jeweils in Punkt P_1 und P_2 ruhen, eine verschiedene potentielle Energie. Aus der Energiedifferenz wird die Spannung (wie in Gleichung (3.6)) definiert.

Die Verschiebungsflussdichte und das elektrische Feld beschreiben zusammen die Vorgänge im elektrostatischen Feld. Sie haben die gleiche Richtung – die Ausbreitungsrichtung der Nahwirkung – und hängen über die Dielektrizitätskonstante ϵ (eine Materialkonstante ähnlich wie κ) unmittelbar zusammen. In jedem Punkt des Raumes gilt:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.4)$$

Die Dielektrizitätskonstante kann für jedes Material ermittelt werden. Sie wird in der Regel als Faktor (ϵ_r = relative Dielektrizitätskonstante) bezogen auf die Dielektrizitätskonstante für Vakuum ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ ²⁵) angegeben ²⁶. Dieser experimentell bestätigte Zusammenhang ist plausibel, da die Verschiebungsflussdichte unabhängig vom Material die

²⁴ Damit wird auch die Maßeinheit von Ψ identisch mit der der Ladung As.

²⁵ Dieser Wert ergibt sich im metrischen Maßsystem; im Gauß'schen Maßsystem wäre $\epsilon_0 = 1$ eine einfache Zahl.

²⁶ Anisotrope Materialien mit Richtungsabhängigkeiten müssen gesondert betrachtet werden.

Menge der Ladung übermitteln muss, die Kraftwirkung auf eine Probeladung aber durchaus vom umgebenden Material beeinflusst werden kann.

4.1.2 Messung und Darstellung von elektrostatischen Feldern

Bei der **Messung einer Spannung** im elektrostatischen Feld mit einem Voltmeter (oder ähnlich wie die Äquipotentiallinien in Abschnitt 3.1.5) müsste eine zumindest geringe Ladungsmenge abfließen. Wenn das nicht geht, da keine beweglichen Ladungen vorhanden sind, muss die Spannung zwischen den Messspitzen sofort zusammenbrechen. Damit verändern aber die Messspitzen das Feld so stark, dass eine Messung mit akzeptablem Fehler so einfach nicht möglich ist. Eine Messung von Elektrode zu Elektrode ist dagegen mit ausreichend kleiner Ladungsentnahme möglich.

Eine **Darstellung von elektrostatischen Feldern** gelingt mit Hilfe kleiner Teilchen aus Polystyrolschaumstoff (früher wurde Holundermark benutzt). Die Teilchen werden auf eine dünne isolierende Platte über einer Elektrodenanordnung gestreut. Sie ordnen sich entsprechend der Feldlinien und ergeben ein eindrucksvolles Bild. Für eine solche Darstellung ist an den Elektroden Hochspannung (z.B. von einem Bandgenerator oder einem Influenzgenerator) notwendig.

4.2 Ladung, Strom und Spannung am Kondensator

4.2.1 Zusammenhang zwischen Ladung, Spannung und Strom

Aus Messungen von Ladung und Spannung an den Elektroden einer Anordnung mit verschiedenen nicht leitenden Materialien ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 4.2).

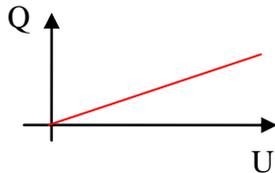


Abb. 4.2: Beispiel einer Messung von Ladung und Spannung

Der größte Teil der technisch verwendeten Materialien ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung, d.h. $Q \sim U$ oder als Geradengleichung: $Q = C \cdot U$ mit dem Proportionalitätsfaktor „C“. Der Proportionalitätsfaktor stellt die Kapazität dar, die diese Anordnung mit ihrem nicht leitenden Material zur Aufnahme von Ladungen besitzt.

Definition der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad ^{27} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } Q = C U$$

(4.5)

Bei nichtlinearem Zusammenhang muss die Funktion $Q = Q(U)$ oder eine Funktion $C = C(U)$ bzw. $C = C(Q)$ gefunden werden (je nachdem, was physikalisch sinnvoller ist).

Für Anordnungen mit homogenem Feld (siehe Abb. 4.3) kann eine Bemessungsgleichung für die Kapazität angegeben werden (d = Elektrodenabstand, A = Elektrodenfläche).

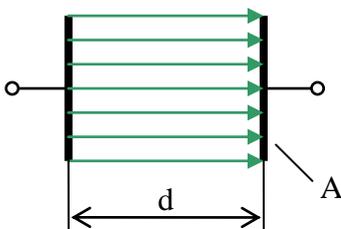


Abb. 4.3: Kapazität mit homogenem Feld

Bemessungsgleichung der Kapazität

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \quad \text{mit } \epsilon = \text{Dielektrizitätskonstante}$$

(4.6)

Liegt kein homogenes Feld vor und können Randfelder nicht auf Grund ihres geringen Beitrages vernachlässigt werden, wird der Nichtleiter in kleine Teile (jeweils so klein, dass dort in guter Näherung ein homogenes Feld vorliegt) unterteilt und anschließend die Gesamtkapazität berechnet.

²⁷ Die Maßeinheit As/V wird nach Faraday mit F bezeichnet.

Wenn sich die Ladungen auf den Platten (z.B. in Abb. 4.1) ändern (Zunahme oder Abnahme), dann müssen auf jeder Seite durch die Anschlüsse gleich viel Ladungen zu- bzw. abfließen. Wird für diesen Leitungsstrom $i(t) = dQ/dt$ die Ladung Q durch die Beziehung $Q = CU$ ersetzt, ergibt sich der Zusammenhang des Stromes in den Zuleitungen von der Klemmenspannung. (Die Spannung zwischen den Platten stimmt mit der Spannung an den Klemmen überein.)

Strom und Spannung an der Kapazität

$$i_c(t) = \frac{d(CU_c)}{dt} = C \frac{dU_c}{dt} \quad \text{letzteres für } C = \text{const} \quad (4.7)$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz in der Leitwertform (3.10) zeigt deutliche Ähnlichkeit, aber bei der Kapazität ist zusätzlich eine Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen. (Ist C nichtlinear $C = C(u)$ oder $C = C(i)$, dann hängt C durch u oder i auch von der Zeit ab. Die Differentiation muss in diesem Fall nach der Produktenregel erfolgen. Das ist z.B. bei allen Kapazitäten von Halbleiterbauelementen der Fall.)

Oft wird auch die Umkehrung benötigt:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + u_c(t=0) . \quad (4.8)$$

Den Gleichungen (4.7) bzw. (4.8) liegt das Verbraucherpfilsystem zugrunde, d.h., beim Aufladen ergibt sich in Abb. 4.1 ein positiver und beim Entladen ein negativer Strom.

Auch bei Kapazitäten gelten Bilanzgleichungen entsprechend der Kirchhoff'schen Sätze.

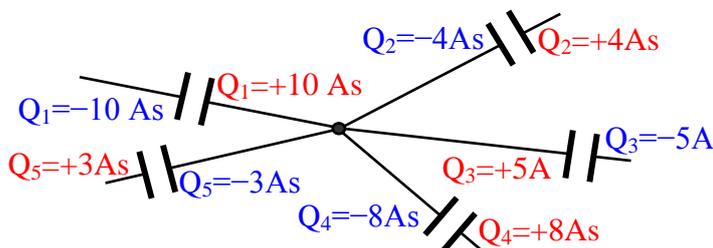


Abb. 4.4: Beispiel für einen Knotenpunkt mit Kapazitäten

Die Ladungen auf den Platten zum Knotenpunkt erfüllen eine analoge Bilanz wie der Knotenpunktsatz (zu jedem Zeitpunkt und natürlich auch statisch).

Ladungsbilanz an einem Knotenpunkt

$$\sum_v Q_v = 0 \quad (4.9)$$

Bei Beachtung der Ladungsbilanz ergibt sich die Reihenschaltung von Kapazitäten.

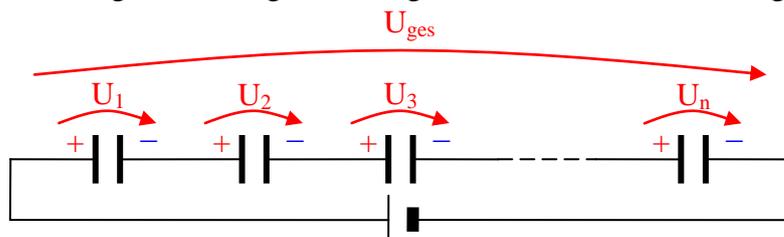


Abb. 4.5: Reihenschaltung von Kapazitäten

Für **dieselbe Ladung** kann mit dem Maschensatz (3.15) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U_{\text{ges}} &= U_1 + U_2 + U_3 \dots + U_n \quad | : Q \\ 1/C_{\text{ges}} &= 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 \dots + 1/C_n \end{aligned} \quad (\text{mit } C = Q / U) \quad (4.10)$$

und ferner $Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = C_3 U_3 \dots = C_n U_n = C_{\text{ges}} U_{\text{ges}} .$ (4.11)

Aus (4.10) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung von Kapazitäten:

Reihenschaltung von Kapazitäten

$$1/C_{\text{ges}} = \sum_v 1/C_v . \quad (4.12)$$

Aus (4.11) kann die Aufteilung der Spannung auf die Kapazitäten einer Reihenschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{C_{\text{ges}}}{C_1} \quad (4.13)$$

In (4.13) wird als Beispiel das Verhältnis von U_1 zu U_{ges} gezeigt. Die Spannungen teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Kapazitäten auf.

Bei einer Parallelschaltung Abb. 4.6 liegt an allen Kapazitäten **dieselbe Spannung**.

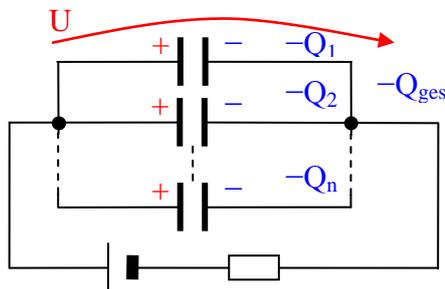


Abb. 4.6: Parallelschaltung von Kapazitäten

Für dieselbe Spannung kann mit der Ladungsbilanz (4.9) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Q_{\text{ges}} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \dots + Q_n \quad | : U \\ C_{\text{ges}} &= C_1 + C_2 + C_3 \dots + C_n \end{aligned} \quad (\text{mit } C = Q / U) \quad (4.14)$$

und ferner $U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \dots = \frac{Q_n}{C_n} = \frac{Q_{\text{ges}}}{C_{\text{ges}}} .$ (4.15)

Aus (4.14) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Kapazitäten:

Parallelschaltung von Kapazitäten

$$C_{\text{ges}} = \sum_v C_v . \quad (4.16)$$

Aus (4.15) kann die Aufteilung der Ladungen auf die Kapazitäten einer Parallelschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Ladungsaufteilung bei Parallelschaltung

$$\frac{Q_1}{Q_{\text{ges}}} = \frac{C_1}{C_{\text{ges}}}$$

(4.17)

In (4.17) wird als Beispiel das Verhältnis von Q_1 zu Q_{ges} gezeigt. Die Ladungen teilen sich wie das Verhältnis der Kapazitäten auf.

Da zur Ableitung von (4.12), (4.13), (4.16) und (4.17) Gleichung (4.5) genutzt wurde, ist die Anwendung auf **lineare Bauelemente** beschränkt bzw. nur für diese sinnvoll.

4.2.2 Bauformen und Kenngrößen

Kondensatoren müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Kapazitätswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite Wichtige ist die Durchbruchspannung, die die Isolation des Dielektrikums gewährleistet. In Fällen, wo Leistung eine Rolle spielt, müssen die Elektroden (in der Regel dünne Folien) auch entsprechende Ströme und die damit zusammenhängende Wärme vertragen. Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität,
- Baugröße und -form,
- Leckwiderstand oder Induktivität von Wickelkondensatoren und Zuleitungen (siehe Abschnitt 5),
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen.

Für technische („reale“) Kapazitäten kann eine einfache Ersatzschaltung angegeben werden (siehe Abb. 4.7).

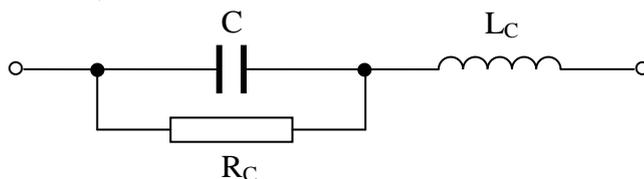
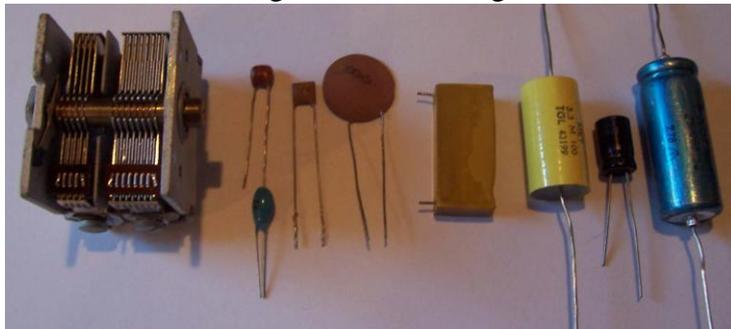


Abb. 4.7: Einfache Ersatzschaltung für einen Kondensator

In Abb. 4.8 sind einige Bauformen abgebildet.



Von links nach rechts:

- Drehkondensator
- Scheibenkondensatoren (4 verschiedene)
- Wickelkondensatoren (2 Ausführungen)
- Elektrolytkondensatoren (2 Ausführungen)

Abb. 4.8: Verschiedene Kondensatoren

4.2.3 Messung der Kapazität

Bei der Messung der Kapazität müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Messung der statischen Kapazität entsprechend (4.5).
2. Messung der dynamischen Kapazität entsprechend (4.7).

Die statische Kapazität muss durch Messung von Ladungsmenge und Spannung erfolgen.

Die dynamische Kapazität beinhaltet einmal die wirksame Größe bei Wechselstrom einer bestimmten Frequenz (für viele Materialien ist ϵ frequenzabhängig) und zum anderen bei nichtlinearen Kapazitäten nur die kleine Wechselstromaussteuerung um den Gleichstromarbeitspunkt.

Für lineare frequenzunabhängige Kapazitäten ergeben beide Messungen ein gleiches Ergebnis.

Multimeter mit Kapazitätsmessung können nur dynamische Kapazitäten messen im Arbeitspunkt $U_{\text{DC}} = 0$ und einer geräteabhängigen festen Frequenz.

Kapazitätsmessbrücken arbeiten nach einem Vergleichsprinzip und realisieren oft verschiedene wählbare Messbedingungen. Auch sie messen die dynamische Kapazität.

4.2.4 Übungsaufgaben zur Kapazität

Aufgabe 4.2.1

Gegeben ist der Stromverlauf in Abb. 4.9.

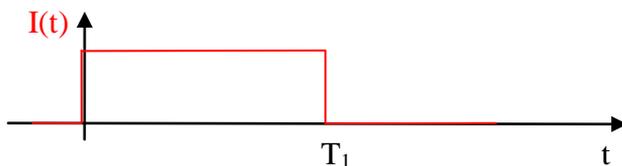


Abb. 4.9: Zeitverlauf des Stromes an einer Kapazität

Frage: Wie sieht der Verlauf der Spannung aus? (In Abbildung einzeichnen!)

Aufgabe 4.2.2

Eine Spannungsquelle mit 30 V soll geglättet werden. Dazu werden 2000 μF benötigt. Es stehen aber nur Kondensatoren von 2000 μF mit einer Spannungsfestigkeit von 20 V zur Verfügung.

Frage: Wie sieht die Schaltung für eine Realisierung aus?

Aufgabe 4.2.3

Berechnung des Ein- und des Ausschaltvorgang für den Versuch in Abschnitt 4.3.3!

(Hinweis: Vereinfachen Sie die Schaltung für den Einschaltvorgang so, dass nur eine konstante Quelle, der Widerstand und der Kondensator einen Stromkreis bilden. Vereinfachen

Sie die Schaltung für den Ausschaltvorgang so, dass nur der Widerstand und der Kondensator einen Stromkreis bilden. Berechnen Sie beider Vorgänge einzeln. Stellen Sie jeweils den Maschensatz auf und setzen das Ohm'sche Gesetz einmal für u_R und dann noch einmal für $i = f(u_C)$ ein. Für die DGL 1. Ordnung kann die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen gelöst werden. Die inhomogene Lösung ist identisch mit $u_C(t \rightarrow \infty)$ und die Anfangsbedingung ist $u_C(t=0)$, d.h. 0 bzw. \hat{U} . Der Beginn wird für beide Fälle mit $t=0$ gewählt.)

Darstellung: Zeichnen Sie Spannung und Strom in einem Diagramm!

Zusatzfrage: Wie kann τ aus einer gemessenen Kurve, die dieser Rechnung entspricht, bestimmt werden?

Aufgabe 4.2.4

Mit einem Elektrolytkondensator von $10 \mu\text{F}$ soll für eine Lichterkette eine Zeitkonstante von 10 s realisiert werden.

Frage 1: Wie groß muss der Widerstand gewählt werden?

Frage 2: Welchen Fehler verursacht der Leckwiderstand des Elektrolytkondensators von ca. $10 \text{ M}\Omega$?

4.3 Energie und Kräfte im elektrischen Feld des Nichtleiters

4.3.1 Beschreibung von Energie und Kräften

Die **Energie** für die Aufladung einer Kapazität ergibt sich ebenfalls nach (3.24) zu:

$$W = \int_0^t u_C(t) i_C(t) dt . \tag{ 4.18 }$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an den Klemmen des Kondensators (4.7) wird daraus:

$$W = \int_0^{U_C} u_C(t) C du_C = C \frac{U_C^2}{2} \quad \text{und mit } Q = C U \text{ wird}$$

$$W = \frac{C U_C^2}{2} = \frac{Q_C U_C}{2} = \frac{Q_C^2}{2C} \tag{ 4.19 }$$

Diese Energie ist im Kondensator **gespeichert**, wenn er mit Q_C auf U_C aufgeladen ist.

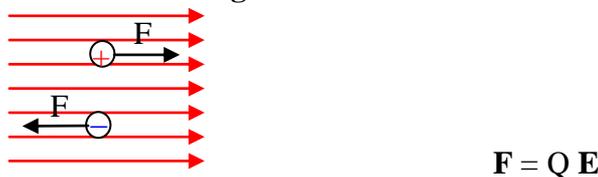
Wenn die mittlere **Leistung** über Auf- und Entladevorgänge berechnet wird, ergibt dies $\bar{P} = \overline{u_C(t) i_C(t)} = 0$, d.h., es wird keine Leistung umgesetzt. Es erfolgt nur ein Hin- und Herspeichern von Leistung. Bei der Aufladung wird Energie im Kondensator gespeichert (potentielle Energie der Ladungen im elektrischen Feld) und bei der Entladung wird diese Energie zurückgegeben. (Lediglich der Transport durch die Leitungen führt durch deren Widerstand zu Verlusten.)

Heute kann dieser Effekt mit so genannten Goldkaps zur Speicherung von kleinen Energiemengen als Ersatz für Batterien genutzt werden. Durch den Leckwiderstand sind Kondensatoren ansonsten nicht für eine Energiespeicherung geeignet (außer für sehr kurze Zeiten).

Im elektrischen Feld existieren zwei Erscheinungsformen für **Kraftwirkungen**

1. Kräfte auf Ladungen und
2. Kräfte auf Grenzflächen verschiedener Materialien (insbesondere Leiter – Nichtleiter).

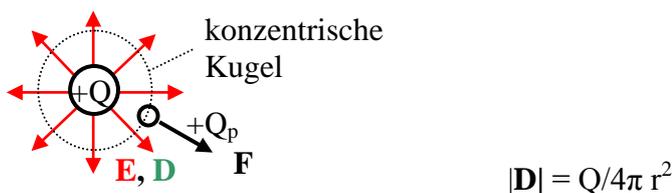
Für **Kräfte auf Punktladungen** ist die Definition des elektrischen Feldes (3.4) zu nutzen.



$$F = Q E$$

Abb. 4.10: Kraft auf eine positive und eine negative Punktladung im Feld

Wenn das Feld von einer zweiten Punktladung erzeugt wird, kann dieses aus (4.2) mit (4.4)



$$|D| = Q/4\pi r^2$$

Abb. 4.11: Punktladung im Feld einer Punktladung

ermittelt werden. Auf der konzentrischen Kugelfläche ist aus Symmetriegründen überall $|D|$ konstant, deshalb kann für $d\Psi/dA_{\perp}$ auch $\Psi_{\text{ges}}/A_{\text{Kugel}} = Q/A_{\text{Kugel}}$ gesetzt werden. Damit wird:

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4 \pi \epsilon r^2} \quad \text{Coulomb'sches Gesetz.} \quad (4.20)$$

Bei Kräften auf Ladungen wird immer **eine Ladung im ungestörten Feld der anderen Ladung** betrachtet. Es werden nicht zuerst die Veränderungen des Feldes durch die zweite Ladung berücksichtigt. Das entspricht der Sichtweise und Definition des elektrischen Feldes.

Für Felder besteht das **Superpositionsprinzip**.

Diese Kraft wird vielfältig zur Beschleunigung und auch zur Ablenkung von geladenen Teilchen genutzt

Kräfte auf Grenzflächen werden günstiger aus der Energieerhaltung bestimmt.

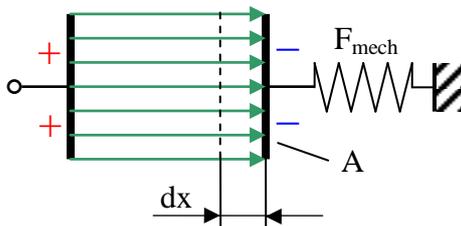


Abb. 4.12: Kräftegleichgewicht mechanische – elektrische Kraft auf die Elektrode

Die Kraft des elektrischen Feldes der positiv geladenen Elektrode auf die negativ geladene Elektrode verkürzt den Abstand der Elektroden, bis die Federkraft gleich ist. Nun gilt folgende Energiebilanz, wenn Q konstant bleibt (für C ist (4.6) einzusetzen):

$$\text{verringerte elektrische Energie} = \text{mechanisch in der Feder gespeicherte Energie}$$

$$\Delta W_{\text{el}} = (Q^2/2\epsilon A) dx = F_{\text{mech}} dx .$$

Damit ergibt sich mit $D = Q/A$ der Betrag der Kraft auf die Grenzfläche zu:

$$\mathbf{F} = \frac{D^2}{2 \epsilon} A = \frac{D E}{2} A = \frac{\epsilon E^2}{2} A \quad (4.21)$$

Im Falle einer Grenzschicht zwischen zwei Dielektrika muss die Differenz von ΔW_{el} des vorherigen und des nachherigen eingesetzt werden. (In und hinter der Elektrode ist kein Feld mehr.)

Die **Richtung der Kraft** ist immer so, dass sich die Verschiebungsflussdichtelinien im für diese schlechteren Medium verkürzen.

Diese Kraft, die nur als Störung bekannt war, wird heute in der Mikromechanik genutzt.

4.3.2 Anwendungsbeispiel und Übungsaufgabe zum Messoszilloskop

Im Oszilloskop wird sowohl für die Strahlbeschleunigung als auch zur präzisen Ablenkung ein elektrisches Feld genutzt.

Bei zeitveränderlichen Spannungen ist das Oszilloskop das wichtigste Messinstrument zur Erfassung, Darstellung und Auswertung.

Strahlerzeugung

Durch das elektrische Feld zwischen Anode und Katode (siehe Abb. 4.13) erfahren die Elektronen eine Beschleunigung ($\mathbf{a} = \mathbf{F} / m_{el} = -q_0 \mathbf{E} / m_{el}$), daraus entsteht eine Differentialgleichung für die Beträge.

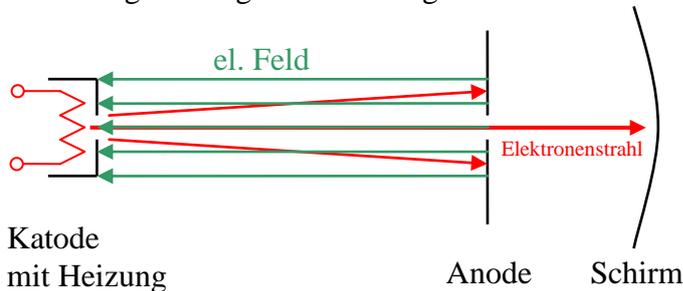


Abb. 4.13: Erzeugung des Elektronenstrahls in der Bildröhre

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q_0}{m_{el}} \frac{dU}{ds} \quad ds \frac{dv}{dt} = \frac{q_0}{m_{el}} dU \quad \int_0^{v_0} v dv = \frac{q_0}{m_{el}} \int_0^{U_A} dU$$

Nach Trennung der Variablen und Integration der Geschwindigkeit von 0 bis v_0 bzw. der Spannung von 0 bis U_A folgt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q_0}{m_{el}} U_A} \quad v_0 / \text{kms}^{-1} = 593 \sqrt{U_A / \text{V}} .$$

(4.22)

Natürlich ist diese Rechnung nur gültig, solange die Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit bleiben. Für ein Oszilloskop liegt U_A zwischen 8000 und 15000 V.

Aufgabe 4.3.1 Strahlablenkung

Für die Strahlablenkung sind (siehe Abb. 4.14) zwischen Anode und Schirm Ablenkplatten angeordnet.

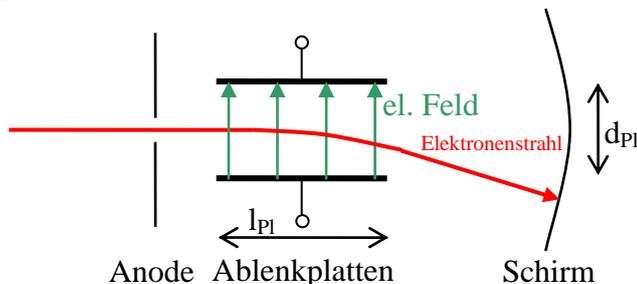


Abb. 4.14: Strahlablenkung in der Bildröhre

Das Feld zwischen den Platten wird aus dem Zeit- bzw. dem Messsignal durch Verstärkung abgeleitet. Die Beschleunigung erfolgt dabei senkrecht zur ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h., es kommt eine senkrechte Geschwindigkeitskomponente dazu; die in Richtung Schirm wird nicht verändert. Die Elektronen befinden sich somit für die Zeit $t_{Ab} = l_{PI} / v_0$ im Feld zwischen den Platten.

Frage 1: Wie groß ist zum Ende der Ablenkung die Geschwindigkeit v_{\perp} bei der Ablenkspannung U_{Ab} und einem Abstand der Platten d_{PI} ?

Frage 2: Wie groß ist der Ablenkwinkel?

(Hinweis: Nutzen Sie die Komponenten der Geschwindigkeit.)

Funktionsprinzip eines Oszilloskops

Aufbau und Wirkungsweise eines Oszilloskops können an der Prinzipdarstellung (Abb. 4.15) erläutert werden.

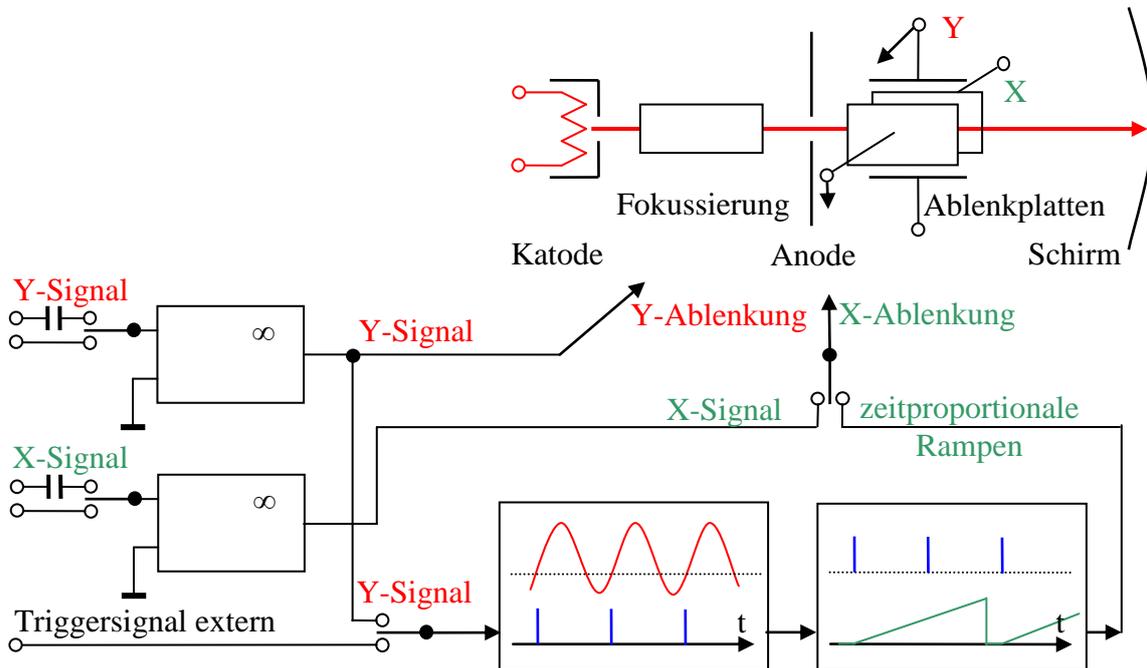


Abb. 4.15: Prinzipdarstellung des Oszilloskops

An den Eingangssignalverstärkern kann eine Signalspannung entweder direkt oder über eine Kapazität (Gleichanteil fällt weg) angeschlossen werden. Das verstärkte Eingangssignal vom y-Verstärker (y-Signal) wird an die y-Ablenkung angeschlossen und zugleich an die Synchronisationseinheit. Dort wird von einem Komparator mit einem Schwellwert verglichen und so ein Synchronimpuls abgeleitet (in Abb. 4.15 blau dargestellt).

Bei einem Synchronimpuls beginnt eine zeitproportionale Rampenspannung (in Abb. 4.15 grün dargestellt). Hat diese ihren Endwert erreicht (Zeitablenkung in x-Richtung ist ganz rechts auf dem Bildschirm), wird bis zum nächsten Synchronimpuls gewartet und dann neu begonnen. Dazwischen liegende Synchronimpulse werden ignoriert. Auf diese Weise entsteht bei periodischen Signalen ein stehendes Bild.

Für spezielle Darstellungen kann die Synchronisation aus einem externen Signal stammen oder ein zweites Eingangssignal (ein x-Signal) wird zur x-Ablenkung genutzt.

Mehrkanaloszilloskope benutzen normalerweise im Timesharing mehrere Eingangssignale für die gleiche y-Ablenkung. So erscheinen sie quasi gleichzeitig und sind gemeinsam auszuwerten.

Durch die Einstellung der Verstärkungsfaktoren und die Anstiegszeit der Rampe kann eine optimale Bildschirmdarstellung erreicht werden.

Das Grundprinzip ist auch bei modernen Oszilloskopen gleich, aber die Einstellung erfolgt über Menüs und wird von einem Controller gesteuert. Außerdem werden zunehmend moderne Displays genutzt.

4.3.3 Messung von Zeitverläufen an der Kapazität

Es sollen im Messlabor die Zeitverläufe von Strom und Spannung am Kondensator untersucht werden.

Versuchsaufbau:

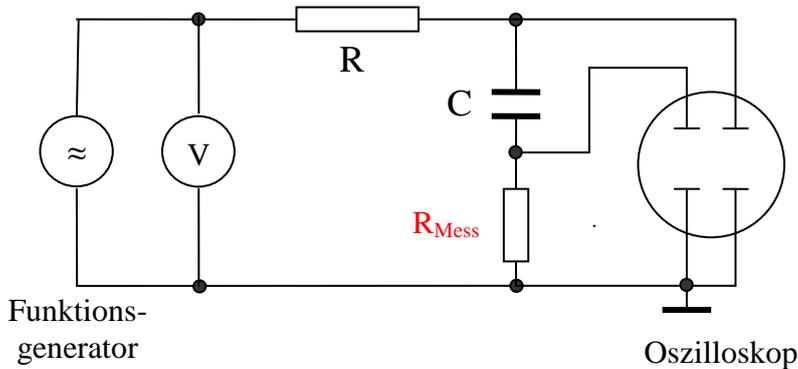


Abb. 4.16: Schaltung des Versuchsaufbaus

(Hinweise: Als Messwiderstand (R_{Mess}) zur Strommessung werden $1\text{ k}\Omega$ eingesetzt. Alle Spannungen sind als Spitze-Spitze-Werte vom Oszilloskop abzulesen.)

Versuchsdurchführung:

Eine Rechteckspannung vom Funktionsgenerator bewirkt ein Laden (Einschaltvorgang, U_{Quelle} wird \hat{U}) und Entladen (Ausschaltvorgang, U_{Quelle} wird 0, d.h. Kurzschluss) des Kondensators über den Widerstand. Auf dem Oszilloskop werden gleichzeitig Strom und Spannung (Zweikanalbetrieb) dargestellt.

Die Kurven können einem PC übergeben und ausgewertet werden. Aus den gemessenen Zeitverläufen sind die Zeitkonstanten zu ermitteln und mit den Bauteilparametern zu vergleichen.

(Hinweis: Die Frequenz ist so zu wählen, dass die Vorgänge etwa ihren jeweiligen Endzustand erreichen – Richtwert 300 Hz.)

Bei 4. ist eine Sinusspannung einzustellen.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:
 $U_{\text{SS}} = 5\text{ V}$ mit $R = 100\text{ k}\Omega$ und $C = 1\text{ nF}$, $3,3\text{ nF}$ und 10 nF
2. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:
 $U_{\text{SS}} = 5\text{ V}$ mit $R = 100\text{ k}\Omega$ und $C = 3,3\text{ nF}$ und $1\text{ nF} \parallel 2,2\text{ nF}$
3. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:
 $U_{\text{SS}} = 5\text{ V}$ und $2,5\text{ V}$ mit $R = 100\text{ k}\Omega$ und $C = 3,3\text{ nF}$
4. Darstellung der Zeitverläufe bei sinusförmiger Spannung:
 $U_{\text{SS}} = 5\text{ V}$ bei $f = 1\text{ kHz}$ $R = 100\text{ k}\Omega$ und $C = 3,3\text{ nF}$
Es sind Amplitude und Zeitverschiebung zu untersuchen.

Zusatzuntersuchung: Vergleichen der Zeitverläufe (z.B. bei 1.) nach Umschalten des Tastkopfes des Oszilloskops von 1:1 auf 1:10 (und dabei von $1\text{ M}\Omega$ auf $10\text{ M}\Omega$)!

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass sich die Spannung erst langsam aufbaut, indem durch den Strom Ladungen auf den Kondensator fließen, bzw. abbaut, wenn Ladungen abfließen.
2. Je größer der Kondensator ist, desto länger müssen Ladungen fließen, damit die Spannung steigt bzw. abnimmt.
3. Der Zeitverlauf (die Dauer, die Zeitkonstante) hängt bei gleicher Kapazität nicht von der Anzahl zusammengeschalteter Kondensatoren und auch nicht von der Endspannung ab.
4. Bei sinusförmiger Spannung läuft der Strom genau $\frac{1}{4}$ Periodendauer (90°) gegenüber der Spannung am Kondensator voraus.
5. Eine mathematische Auswertung erfolgt mit Aufgabe 4.2.3.
6. Die entscheidende Kenngröße ist die Zeitkonstante $\tau = R C$.
7. Auch beim Anschluss eines Oszilloskops entstehen Messfehler.

5 Vorgänge im Magnetfeld

5.1 Grundbegriffe für magnetische Größen

5.1.1 Darstellung der Grundgrößen aus physikalischen Überlegungen

Bei Versuchen stellte Oersted zufällig fest, dass eine Magnetnadel in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters ausschlägt. Damit war das erste Mal ein Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen erkannt worden. Der Raum um einen stromdurchflossenen Leiter musste sich also genauso wie der um einen Permanentmagneten in einem „besonderen Zustand“ befinden. Dieses konnte aus entsprechende Kraftwirkungen (z.B. Ausschlag einer Magnetnadel, Ausrichtung von Eisenfeilspänen) geschlussfolgert werden.

Die Erkenntnis eines Zusammenhanges zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen hat die theoretische Entwicklung stark beeinflusst. Wie das elektrische Feld konnte das magnetische Feld erfolgreich beschrieben werden. Da diese **Beschreibung in Analogie zum elektrischen Strom und dem elektrischen Feld** besonders einfach ist, hat sie sich durchgesetzt und wird bis heute so gelehrt.

Heute können **Kräfte zwischen bewegten Ladungen** unter Einbeziehung der speziellen **Relativitätstheorie** untersucht werden. Damit wurde klar, dass es nicht zwei Felder oder zwei miteinander verbundene Erscheinungen gibt, sondern **ein einheitliches Feld** [11].

Bei einer Unterteilung der Wirkung zwischen bewegten Ladungen in

- einerseits einen Anteil entsprechend dem von ruhenden Ladungen und
- andererseits einen zusätzlichen Anteil durch die Bewegung

können die

- ersteren mit den in ruhenden Beobachtungssystemen (Abschnitt 3 und 4) behandelten Vorgängen und
- die letzteren mit den Vorgängen im Magnetfeld

beschrieben werden. Bei dieser formalen Unterteilung in zwei Felder kann man die **bewegte Ladung als Ursache und Ausgangspunkt magnetischer Erscheinungen** leider nicht adäquat deutlich machen (wie für die Ladung als Ausgangspunkt elektrischer Erscheinungen). Weitere Überlegungen dazu können Interessierte, die eine kompliziertere mathematische Untersuchung nicht scheuen, in [7] nachvollziehen.

Der Ausgangspunkt zur Beschreibung der Vorgänge im Magnetfeld ist die **Analogie** zum elektrischen Strom, der Spannung und insgesamt dem elektrischen Feld.

Dazu gehen wir von einem einfachen magnetischen Kreis und zum Vergleich einem elektrischen Stromkreis aus (siehe Abb. 5.1).

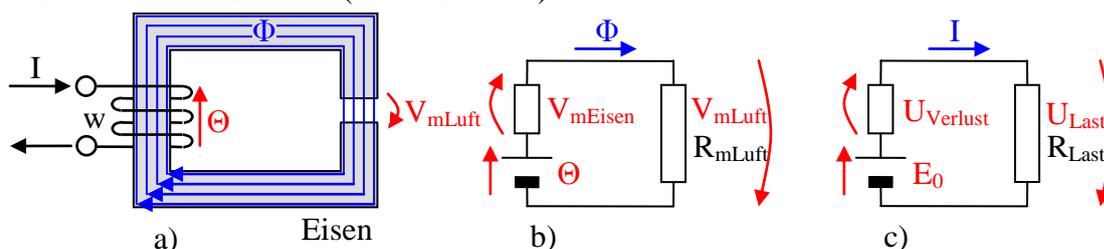


Abb. 5.1: a) Skizze, b) symbolischer magnetischer Kreis aus Eisen, c) Stromkreis

Der elektrische Strom I fließt in w Windungen um den Eisenkern, der zusätzlich einen kleinen Luftspalt hat. Die bewegten Ladungen des Stromes bewirken eine magnetische Urspannung Θ . Es kann experimentell gefunden werden, dass $\Theta \sim I$ und $\Theta \sim w$ (w = Anzahl Windungen) ist. Durch entsprechende Wahl der Maßeinheit kann der Proportionalitätsfaktor = 1 festgelegt werden:

magnetische Urspannung oder Durchflutung

$$\Theta = I w \quad (5.1)$$

Auch Permanentmagnete besitzen eine magnetische Urspannung. Schon Ampère hat darauf hingewiesen, dass molekulare Ströme diese erzeugen (also ebenfalls bewegte Ladungen). In der Regel heben sich alle molekularen Ströme (z.B. um die Atomkerne kreisende Elektronen) gegenseitig auf. Nur bei wenigen Materialien kann hier ein Ungleichgewicht durch Magnetisierung hervorgerufen werden (z.B. bei Eisen, Kobalt oder Nickel).

Durch die magnetische Urspannung „angetrieben“ wird ein magnetischer Fluss Φ in einem geschlossenen Kreislauf fließen. (Als eine **Vorstellung** analog zum elektrischen Strom können damit magnetische Vorgänge einfach und **bildhaft beschrieben** und Größen richtig ermittelt werden, auch wenn hier nichts wirklich fließt.) Wegen des geschlossenen Kreislaufs muss auch für diesen Fluss ein Knotenpunktsatz analog (3.14) gelten.

magnetischer Fluss

$$\Phi \quad (5.2)$$

Weil Eisen den magnetischen Fluss ca. 1000-mal besser leitet als Luft, wird fast der gesamte Fluss im Eisenkreis um die stromführenden Leiter herumfließen (der kleine Luftspalt ändert dies nicht wesentlich). Ein stromführender Leiter wird je nach Stromrichtung rechts- oder linksherum umflossen. Die Festlegung erfolgte in mathematisch positivem Sinn und wird am besten mit der Rechten-Hand-Regel ermittelt.



Der Daumen der rechten Hand zeigt in die Richtung des Stromes. Die Fingerspitzen weisen dann in die Richtung des Umfließens durch den magnetischen Fluss.

Abb. 5.2: Rechte-Hand-Regel

Für einen räumlich verteilten Fluss wird zur Beschreibung wieder eine Flussdichte analog zur Stromdichte definiert, in welchem der Anteil des Flusses durch ein kleines Flächenelement (dA_{\perp}) senkrecht zur Flussrichtung (e_{Φ}) berechnet wird.

magnetische Flussdichte

$$|\mathbf{B}| = \frac{d\Phi}{dA_{\perp}} \quad (5.3)$$

mit $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|e_{\Phi}$ und $\Phi = \int_{\text{Querschnittsfläche}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$

²⁸ Die Maßeinheit lautet nach dem Strom A, wird aber in der Regel Amperewindungen genannt (wegen der dimensionslosen Anzahl der Windungen und der besseren Unterscheidung).

²⁹ Die Maßeinheit ist Vs (erst nach Abschnitt 5.1.6 verständlich) oder wird nach Weber Wb genannt.

³⁰ Die Maßeinheit lautet A/m² oder wird nach Tesla T genannt.

Die Flussdichte kann in jedem Punkt des Leiters in Betrag und Richtung bestimmt (gemessen) werden.

Das entspricht dem Begriff eines Vektorfeldes – dem Feld der magnetischen Flussdichte.

Weiterhin wird in Analogie zum Spannungsabfall des elektrischen Stromkreises ein magnetischer Spannungsabfall V_m ebenfalls in Flussrichtung (entlang eines Wegabschnittes des Flusses) definiert.

magnetischer Spannungsabfall

$$V_m \quad {}^{31} \quad (5.4)$$

Daran anknüpfend kann auch der Begriff einer Feldgröße analog zu (3.7) definiert werden.

magnetisches Feld

$$\mathbf{H} = \frac{dV_m}{ds} \mathbf{e}_\Phi \quad {}^{32} \quad (\text{genauer } \mathbf{H} = \mathbf{grad}V_m \quad \text{und} \quad V_m = \int_{\text{Weg}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}) \quad (5.5)$$

Selbstverständlich gelten auch analoge Zählpfeilrichtungen für magnetischen Fluss, Spannungsabfall und Urspannung wie für elektrischen Strom und Spannung (Abschnitt 3.1.1).

Durch experimentelle Untersuchungen wurde mit hoher Genauigkeit und Reproduzierbarkeit gefunden, dass

- die Richtungen von \mathbf{B} und \mathbf{H} immer gleich sind ³³
- und sie über die Materialkonstante μ (Permeabilität) zusammenhängen ³⁴.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.6)$$

Die Permeabilität kann für jedes Material ermittelt werden. Sie wird in der Regel als Faktor (μ_r = relative Permeabilität) bezogen auf die Permeabilität für Vakuum ($\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am = $4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am ³⁵) angegeben ³⁶.

In gleicher Weise kann jetzt ein magnetischer Widerstand R_m definiert werden.

magnetischer Widerstand

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} \quad {}^{37} \quad \text{aus der Definitionsgleichung } V_m = R_m \Phi \quad (5.7)$$

Bemessungsgleichung des magnetischen Widerstands

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (5.8)$$

³¹ Die Maßeinheit ist die gleiche wie für die magnetische Urspannung, d.h. A.

³² Die Maßeinheit ergibt sich zu A/m.

³³ Das folgt auch aus der analogen Definition zum elektrischen Feld.

³⁴ Die Permeabilität kann von einer Sättigung, der Temperatur und anderen Einwirkungen abhängen. Sie ist gerade bei den technisch interessanten Materialien nicht konstant. Ihre Maßeinheit ist (Vs/m²)/(A/m)=Vs/Am.

³⁵ Dieser Wert ergibt sich im metrischen Maßsystem; im Gauß'schen Maßsystem wäre $\mu_0 = 1$ eine einfache Zahl.

³⁶ Anisotrope Materialien mit Richtungsabhängigkeiten müssen gesondert betrachtet werden.

³⁷ Die Maßeinheit wird A/Vs.

Liegt kein homogenes Feld vor und können Randfelder nicht auf Grund ihres geringen Beitrages vernachlässigt werden, wird das Feld in kleine Teile (jeweils so klein, dass dort in guter Näherung ein homogenes Feld vorliegt) unterteilt und anschließend der Gesamtwiderstand berechnet.

Mit diesen Begriffen können alle Vorgänge im Magnetfeld dargestellt werden.

Für eine mit \mathbf{v} bewegte Punktladung folgt bei Nutzung der Relativitätstheorie (alle Größen außer \mathbf{v} am Ort ihrer Bestimmung/Messung erfasst).

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad \mathbf{B} = (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad \Phi = \int_{\text{Fläche}} d\mathbf{A} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2 \quad V_m = \int_{\text{Weg}} d\mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{D})$$

Sind mehrere bewegte Ladungen (oder ein Strom) vorhanden, müssen zusätzlich die Wirkungen aller im Wirkungsbereich befindlichen Ladungen addiert werden. Damit ist zwar deutlicher zu sehen, dass nur ein einheitliches Feld besteht, aber die mathematische Komplexität ist ebenfalls unübersehbar.

5.1.2 Übungsaufgaben zum magnetischen Kreis

Aufgabe 5.1.1

Für die Darstellung in Abb. 5.3 (vereinfachte Anordnung wie bei einem kleinen Kern eines Transformators, bei Gleichstrom auch Ersatz durch Permanentmagnet) sind weiter gegeben:

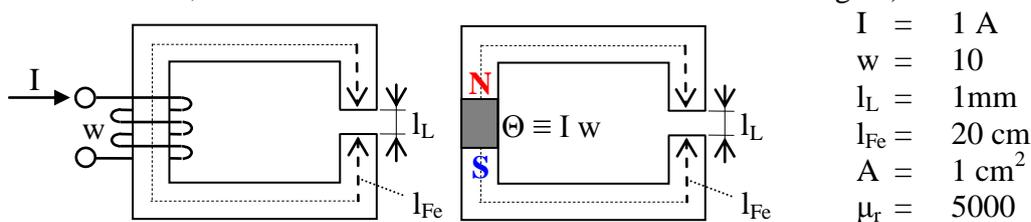


Abb. 5.3: Darstellung der Abmessungen des magnetischen Kreises

Frage 1: Wie groß ist Θ für den elektrisch erregten Fall?

Frage 2: Wie groß sind die magnetischen Widerstände R_{mL} und R_{mFe} ?

Frage 3: Wie groß sind der magnetische Fluss und die Flussdichte?

Frage 4: Wie groß sind H_L , H_{Fe} , V_{mL} und V_{mFe} ?

(Hinweis: Die Inhomogenität der Ecken kann vernachlässigt werden, d.h. skizzierte mittlere Länge nutzen. Für den kleinen Luftspalt kann das Feld nach außen vernachlässigt werden.)

Aufgabe 5.1.2

Eine lange einlagige Luftspule (siehe Abb. 5.4) mit 1000 Windungen, 50 cm Länge und 5 cm Durchmesser wird von 1 A durchflossen.



Abb. 5.4: Lange einlagige Luftspule

Frage: Wie groß sind der magnetische Widerstand und die Flussdichte?

(Hinweis: Eine lange Spule hat innen näherungsweise ein homogenes Feld und das äußere Feld ist von vernachlässigbarem Einfluss.)

5.1.3 Das Durchflutungsgesetz

Analog zur elektrischen Spannung kann auch für magnetische Spannungsabfälle und Urspannungen ein Maschensatz experimentell bestätigt werden; vergleiche (3.15). Dieser hat für das Magnetfeld aber eine weiterreichende Bedeutung. Er stellt die Wandlung oder den Übergang von elektrischen zu magnetischen Größen dar.

$$\Theta_{\text{ges}} = \sum I_{\text{umfasst}} = \sum \Theta_v = \sum V_{m,\mu} \quad \text{in gleichem Umlaufsinn gezählt} \quad (5.9)$$

Anstelle $\Theta = I w$ kann verallgemeinert die Summe aller durch den Weg des Flusskreislaufes umfassten Ströme angesetzt werden (umfassen heißt geschlossener Kreislauf). Damit wird auch berücksichtigt, wenn Ströme in verschiedener Richtung umlaufen werden. Hierbei gilt wieder die Rechte-Hand-Regel (mathematisch positive Richtung, siehe Abb. 5.2). Wird V_m nach (5.5) durch \mathbf{H} ersetzt, folgt das Durchflutungsgesetz als allgemeinste Form (Durchflutung als Begriff für Antrieb magnetischer Flüsse):

Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum I_{\text{umfasst}} \quad (5.10)$$

Magnetische Spannungsabfälle oder die Umlaufsumme (Ringintegral) können mit einer Rogowskispule nachgewiesen werden [12]. Diese Spule besteht aus einem Lederriemen, der dicht und gleichmäßig mit einer Lage Windungen versehen ist. Dadurch lassen sich ein oder mehrere verschiedene Ströme führende Leiter einmal bzw. mehrere Male umfassen. Die Auswertung der Ergebnisse bestätigt Gleichung (5.10) (vergleiche Abb. 5.5).

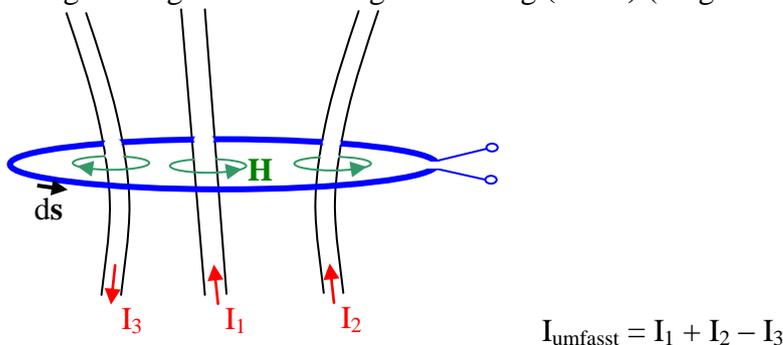


Abb. 5.5: Drei Leiter werden einmal von einer Rogowskispule umfasst

Das Durchflutungsgesetz kann vorteilhaft zur Berechnung von Magnetfeldern eingesetzt werden. Dazu soll das Feld eines unendlich langen geraden Leiters (in der Praxis viel länger als interessierende Entfernungen vom Leiter) untersucht werden. Mit diesem Beispiel werden auch Magnetfelder und ihre Ausdehnung für Leitungen und Kabel demonstriert. Bei einem Leiter wie in Abb. 5.6 gibt es keinen Grund für das Magnetfeld, sich nicht vollkommen

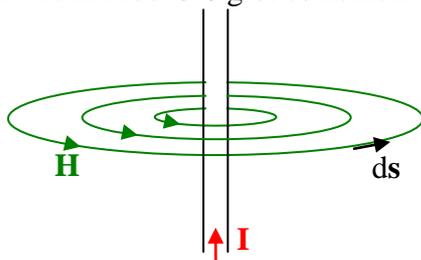


Abb. 5.6: Gerader Leiter mit Magnetfeld

zylindersymmetrisch auszudehnen, denn es gibt in der Ebene senkrecht zum Leiter keine Vorzugsrichtung. Somit muss auf einem konzentrischen Kreis um den Leiter der Betrag von \mathbf{H} konstant sein. Wird das Ringintegral (5.10) auf einem konzentrischen Kreis in Richtung des Feldes berechnet, können die Beträge von \mathbf{H} und ds eingesetzt, das konstante H vor das Integral gezogen und entlang des Kreisumfangs integriert werden.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H \oint ds = H 2\pi r = I \quad \text{d.h.} \quad H = \frac{I}{2\pi r} \quad (5.11)$$

Achtung: Für einen Kreis innerhalb des Leiters wird nur ein anteiliger Strom umfasst, so dass ein linearer Zusammenhang entsteht (Anteil $\pi r^2 / \pi r_{\text{Leiter}}^2$).

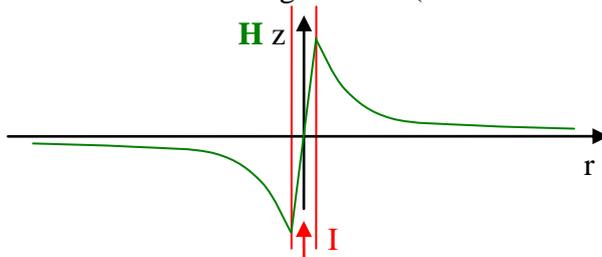


Abb. 5.7: Ergebnis $H = f(r)$ grafisch dargestellt

Durch die Gültigkeit des Superpositionsprinzips können durch Addition die Felder mehrerer Leiter (gleich- oder entgegengerichtete Ströme) bestimmt werden. Ist die Symmetrie nicht so günstig, bleibt zwar (5.10) richtig, das Integral ist aber kaum lösbar. In diesem Falle müssen das Biot-Savart'sche Gesetz oder Gleichungen des Vektorpotentials genutzt werden (Weiterführendes dazu siehe in [12]).

5.1.4 Messung und Darstellung von magnetischen Feldern – Feldlinien

Bei der **Messung magnetischer Größen** (Flussdichte, ev. magnetischer Spannungsabfall zwischen den beiden Enden der Rogowskispule³⁸) kann die Messung mit kleinen Messspulen Hallensensoren oder magnetoresistiven Sensoren durchgeführt werden, welche genügend kleine Fehler hinterlassen.

Eine sehr anschauliche **Darstellung von Magnetfeldern** gelingt mit Eisenfeilspänen. Die Teilchen werden auf eine dünne unmagnetische Platte über einer Anordnung von Magneten gestreut. Sie ordnen sich entsprechend der Feldlinien und ergeben ein eindrucksvolles Bild. Für eine solche Illustration reichen einfache Permanent- oder Elektromagnete, die Späne dürfen nicht zu fein und nicht zu rund sein.

Feldbilder verwendete schon Faraday als einfache Form zur qualitativen Darstellung von Vorgängen im Magnetfeld. Dazu werden grob die Flussdichtelinien vom Nord- zum Südpol bzw. um die Leiter gezeichnet. Als Regel gilt, dass sich diese Feldlinien nie schneiden oder kreuzen, sie müssen sich den Platz teilen. In Abb. 5.8 sind je zwei parallele Leiter mit entgegengerichtetem bzw. gleichgerichtetem Strom im Querschnitt dargestellt. Eine quantitative Darstellung kann analog (5.11) oder durch eine punktweise Addition von je zwei Kurven (mit entsprechendem Vorzeichen) gemäß Abb. 5.7 erreicht werden.

³⁸ Die Messung geht aber genau genommen auch auf die Flussdichte zurück.

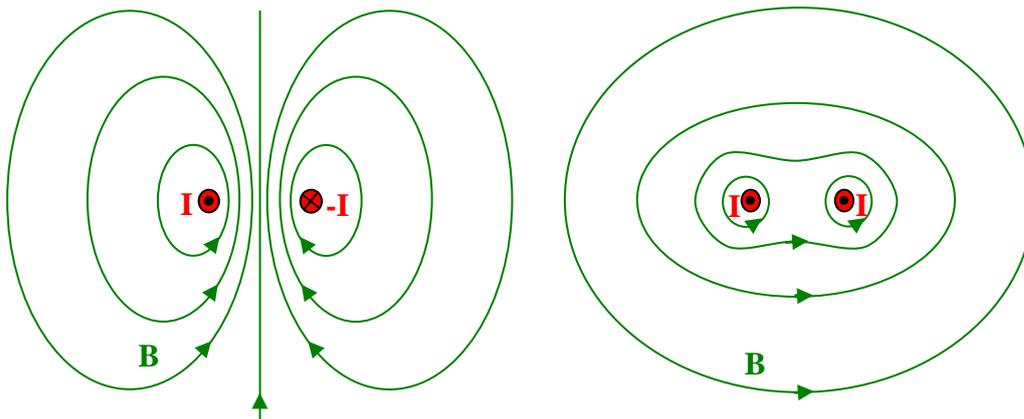


Abb. 5.8: Felddbilder von zwei parallelen Leitern

Sehr deutlich ist erkennbar, wie sich die Feldlinien bei entgegengerichteten Strömen zwischen den Leitern verdichten. Dagegen wird der Raum zwischen gleichgerichteten Strömen vom Feld verdünnt. Aus dieser Tatsache können anschaulich Kraftwirkungen abgeleitet werden.

- Wo Feldlinien verdichtet sind, entstehen Kräfte, die diese auseinanderdrücken.
- Wo Feldlinien verdünnt sind, entstehen Kräfte, die diese zusammendrücken.
- Kräfte versuchen immer, Feldlinien im ungünstigeren Material zu verkürzen.

Das ist nur möglich, wenn die stromführenden Leiter oder die Magnete auseinander- bzw. zusammengedrückt werden.

5.1.5 Lorentzkraft

Befinden sich in einem Beobachtungssystem S eine bewegte Ladung sowie eine bewegte Probeladung, kann mit Hilfe der Lorentztransformation in entsprechend mitbewegte Beobachtungssysteme S' und S'' transformiert werden, so dass die Kraft einer ruhenden Ladung im elektrischen Feld nach (3.4) angewendet werden kann (siehe z.B. [7]). Nach der Rücktransformation ergibt sich infolge beider Bewegungen für die Kraft ein zusätzlicher Anteil zu dem von zwei ruhenden Ladungen.

Die Kraft zwischen zwei bewegten Ladungen wurde von Lorentz gefunden und sie entspricht der Kraft einer bewegten Probeladung im Magnetfeld einer sich bewegenden Ladung.

Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = Q_p \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}$$

(5.12)

Das Kreuzprodukt besagt dabei, dass \mathbf{v}_p , \mathbf{B} und \mathbf{F} im Sinne eines Rechtssystems aufeinander senkrecht stehen (siehe Abb. 5.9).

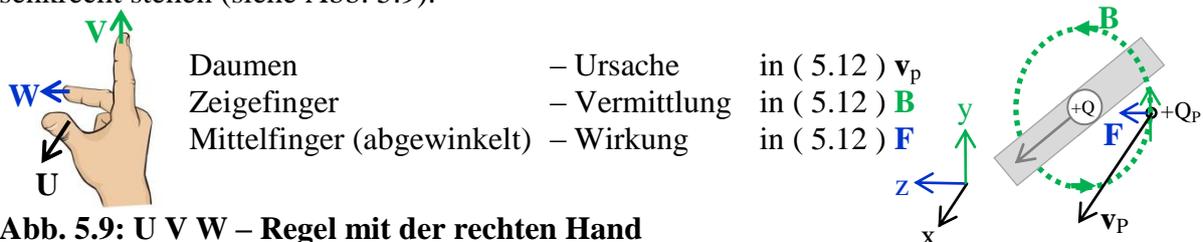


Abb. 5.9: U V W – Regel mit der rechten Hand

Vermittlung bedeutet hierbei, die magnetische Flussdichte vermittelt (entsprechend ihrer Größe und Richtung), bewirkt aber keine Energieveränderung. Das ist darin begründet, dass die Kraft immer senkrecht auf der momentanen Bewegungsrichtung steht. Wenn keine

weiteren Kräfte Q_p beeinflussen, kann somit durch die Lorentzkraft keine Energieveränderung erfolgen. Gibt es weitere z.B. mechanische Kräfte, müssen diese für jegliche Energieveränderung bzw. -wandlung sorgen. Eine erste und wichtige Anwendung erfolgt in der Induktion elektrischer Spannungen im Generator (Stromerzeugung nach dem „Dynamoprinzip“). Weitere praktische Auswirkungen siehe Abschnitt 5.1.6.

5.1.6 Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz tritt bei experimentellen Untersuchungen in zwei Formen auf. Die **Bewegungsinduktion** beruht auf der Bewegung eines Leiters im zeitkonstanten Magnetfeld und die **Ruheinduktion** erfolgt durch ein zeitveränderliches Magnetfeld ohne bewegte Teile.

Das **Prinzip der Bewegungsinduktion** zeigt Abb. 5.10.

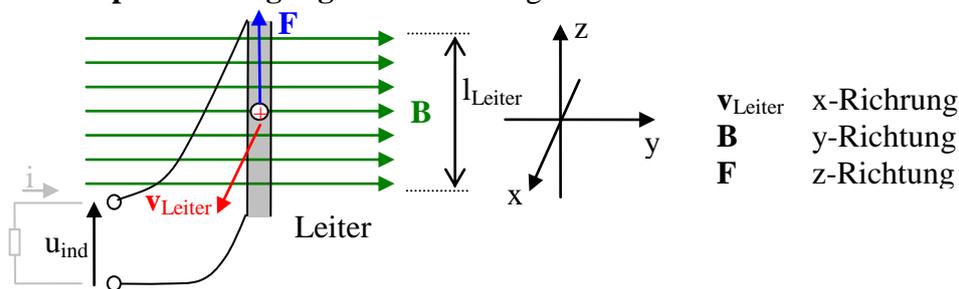


Abb. 5.10: Leiter bewegt sich im Magnetfeld nach vorn

In dem Leiter, der sich mit v_x im Bereich der zeitkonstanten magnetischen Flussdichte \mathbf{B}_y bewegt, erfahren positive Ladungsträger³⁹ die Lorentzkraft \mathbf{F}_z und werden nach oben gedrückt. Die Festlegung der Richtung der Spannung u_{ind} erfolgte in Abb. 5.10 nach der Rechten-Hand-Regel. Dabei zeigt der Daumen in Flussrichtung und die gekrümmten Finger zeigen von der Anfangsklemme mit den Fingerspitzen zur Zielklemme die Spannungsrichtung (analog Abb. 5.2). Damit wird der Spannungsabfall (und der Strom) an den Klemmen in Abb. 5.10 negativ⁴⁰. Der Weg $\mathbf{l}_z = \mathbf{k} l_z$ entspricht der Länge des Leiters im Bereich der magnetischen Flussdichte. Nach (3.7) wird also (Energie = Kraft mal Weg):

$$u_{\text{ind}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}} = - \int_{l_{\text{Leiter}}} (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}_{\text{Leiter}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p .$$

Bei konstanter Geschwindigkeit sowie Flussdichte folgt

Induktionsgesetz Bewegungsinduktion

$$u_{\text{ind}} = - (\mathbf{v}_{\text{Leiter}} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{\text{Leiter}} = - v_x B_y l_z .$$

(5.13)

Durch diese Richtungsfestlegungen ist die Lenz'sche Regel unmittelbar erfüllt. Nach Schließen des Stromkreises an den Klemmen mit einem Widerstand wird durch den Stromfluss (u_{ind} ist negativ so auch i) in Krafrichtung die Gegenkraft $\mathbf{F}_{\text{gegen}} = Q_p \mathbf{v}_{\text{Strom}} \times \mathbf{B}$ entstehen (UUV-Regel) und der Bewegung des Leiters (der Ursache v_{Leiter}) entgegenwirken⁴¹ (also in $-x$ -Richtung).

³⁹ Elektronen erfahren eine umgekehrte Kraft. Das bedeutet aber gleiche Spannung und gleichen Strom (infolge der negativen Ladung).

⁴⁰ Ein Vergleich mit Abb. 3.5 ergibt die Zählpfeilrichtungen eines Erzeugers.

⁴¹ Bei einer Bewegung nach hinten mit einer Vergrößerung des Flusses ergibt sich das entsprechende Ergebnis.

Eine Umformung von (5.13) kann mit $B_y l_z v_x = B_y l_z dx/dt = B_y (-dA_{LS}/dt) = -d\Phi_{LS}/dt$ erfolgen. Die **Bewegung** des Leiters nach vorn **wird** den Fluss, der durch die Leiterschleife hindurchtritt verkleinern ($-d\Phi_{LS}$). (Fläche $A_{LS} = l_z x =$ Fläche der Leiterschleife bestehend aus Leiter und Zuleitungen, die nach vorn außerhalb des Flusses laufen.).

$$u_{ind} = - \left(- \frac{d\Phi_{LS}}{dt} \right) = \frac{d\Phi_{LS}}{dt} \quad (5.14)$$

Dabei ist Φ der Fluss innerhalb der Leiterschleife. Die Richtung von u_{ind} wird unverändert nach der Rechten-Hand-Regel festgelegt.

Wichtig ist, dass zur Berechnung einer Anordnung nur entweder (5.13) oder (5.14) genutzt werden darf. Deshalb muss vorher der Betrachtungsstandpunkt genau geklärt werden.

Entweder wird der Standpunkt ruhend zum konstanten Magnetfeld eingenommen, dann folgen ein bewegter Leiter und Gleichung (5.13), oder der Standpunkt ruhend zum Leiter, es folgen eine zeitliche Änderung des Magnetfeldes durch A_{LS} und Gleichung (5.14).

Das **Prinzip der Ruheinduktion** benötigt ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld, z.B. von einem sich zeitlich ändernden Strom. Das Prinzip kann aus (5.14) gefolgert werden. Es wurde von Faraday experimentell gefunden. Eine entsprechende Anordnung zeigt Abb. 5.11.

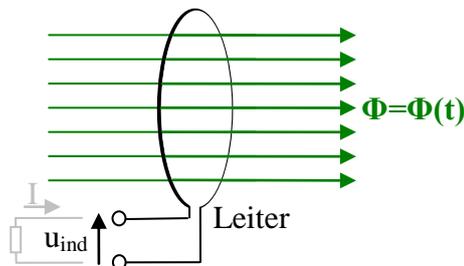


Abb. 5.11: Leiterschleife in einem zeitveränderlichen Magnetfeld

Die Richtungsfestlegung des Spannungsabfalls erfolgte in Abb. 5.11 wieder nach der Rechten-Hand-Regel. Dadurch ist die Lenz'sche Regel wiederum unmittelbar erfüllt. Nach Schließen des Stromkreises an den Klemmen durch einen Widerstand wird durch den Stromfluss entsprechend u_{ind} ein dem Anstieg (der Ursache) des Flusses $\mathbf{B}(t)$ entgegenwirkender Fluss erzeugt ⁴³. Für die Ruheinduktion kann auf dieser Denkweise nur der Standpunkt ruhend zum Leiter eingenommen werden. Wird anstelle der Leiterschleife eine Spule mit w Windungen eingesetzt, entsteht u_{ind} für jede Windung und es wird insgesamt:

Induktionsgesetz Ruheinduktion

$$u_{ind} = w \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.15)$$

Liegt eine Bewegung in einem zeitveränderlichen Feld vor, sind beide Teile zu beachten.

Induktionsgesetz insgesamt

$$u_{ind} = w \frac{d\Phi_{LS}}{dt} - (\mathbf{v}_{Leiter} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}_{aller\ Leiter} \quad (5.16)$$

Dabei ist der Betrachtungsstandpunkt eindeutig zu wählen, um nichts doppelt zu erfassen.

⁴² Hier erklärt sich die Maßeinheit von Φ zu Vs.

⁴³ Ein Vergleich mit Abb. 3.5 ergibt ebenfalls die Zählpfeilrichtungen eines Erzeugers.

Bei Einbeziehung der speziellen Relativitätstheorie ergibt sich für einen zeitveränderlichen Strom in einem Beobachtungssystem S' , das sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stromänderung (Lichtgeschwindigkeit des Leitermaterials c_{Kupfer}) mitbewegt, ein zeitkonstantes Feld. Auf diese Weise lässt sich auch die Ruheinduktion auf die Lorentzkraft zurückführen. Die Ladungsträger einer Leiterschleife, die zum Leiter in S ruhend angeordnet ist, bewegen sich mit c_{Kupfer} in S' in umgekehrte Richtung wie das System. Es kann sinngemäß entsprechend der konkreten Verhältnisse mit (5.13) gerechnet und mit der Lorentztransformation zurücktransformiert werden (siehe [7]). Damit erfolgt die Wirkung der Ruheinduktion ebenfalls aus einer Kraft auf bewegte Ladungsträger, nur ist hierbei das Prinzip der Stromausbreitung im Leiter konkret zu berücksichtigen.

Für die meisten Anwendungen ist es hilfreich, die Ruheinduktion in Selbst- und Gegeninduktion zu unterteilen. Bei der **Selbstinduktion** Abb. 5.12 wird das Magnetfeld von dem Strom durch die Leiterschleife (oder Spule mit w Windungen) erst selbst erzeugt (Rechte-Hand-Regel).

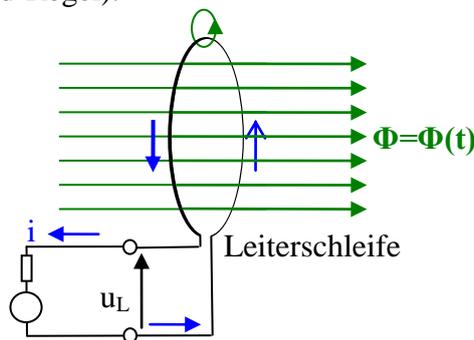


Abb. 5.12: Leiterschleife mit selbst erzeugtem Magnetfeld

Für den Fall eines zeitveränderlichen Stromes wird die Leiterschleife demzufolge von einem zeitveränderlichen magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durchsetzt. Damit entsteht mit mathematisch positiver Richtungsdefinition (Rechte-Hand-Regel) an den Klemmen die Spannung u_L .

$$u_L = w \frac{d\Phi(i)}{dt} \tag{ 5.17 }$$

Zur Darstellung der **Gegeninduktion** und ihrer vollen Verkopplung wird eine zweite Leiterschleife (oder Spule mit w_2 Windungen) gezeichnet Abb. 5.13. Durch Leiterschleife 1

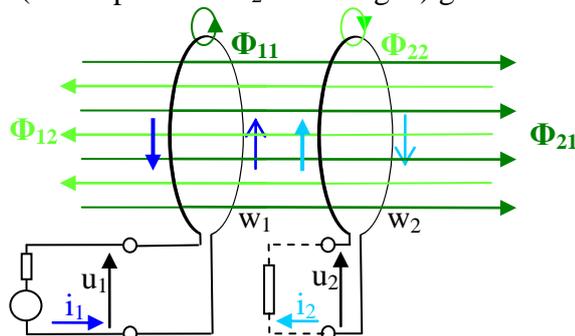


Abb. 5.13: Verkopplung von Selbst- und Gegeninduktion

fließt der Strom i_1 und erzeugt den magnetischen Fluss Φ_{11} , der natürlich vollständig durch diese Schleife strömt. Ein etwas geringerer Teil dieses Flusses Φ_{21} durchströmt Leiterschleife 2. Daraus folgen die induzierten Spannungen:

$$u_{\text{ind11}} = w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind21}} = w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} .$$

Beide zeigen nach der Rechten-Hand-Regel in Richtung von u_1 und u_2 . Wird an die Klemmen von Leiterschleife 2 ein Widerstand angeschlossen, fließt infolge $u_{\text{ind}2}$ der Strom i_2 und erzeugt den Fluss Φ_{22} , der wiederum vollständig durch Leiterschleife 2 geht, aber etwas geringer (Φ_{12}) durch Leiterschleife 1. Daraus folgen die induzierten Spannungen:

$$u_{\text{ind}12} = w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad \text{und} \quad u_{\text{ind}22} = w_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} .$$

Beide zeigen nach der Rechten-Hand-Regel entgegen der Richtung von u_1 und u_2 (vergleiche auch Lenz'sche Regel). Für u_1 und u_2 folgt insgesamt:

$$u_1 = u_{\text{ind}11} - u_{\text{ind}12} \quad \text{und} \quad u_2 = u_{\text{ind}21} - u_{\text{ind}22}$$

und daraus werden die Viergleichungen:

$$u_1 = w_1 \frac{d\Phi_{11}(i_1)}{dt} - w_1 \frac{d\Phi_{12}(i_2)}{dt} \quad \text{und} \quad u_2 = w_2 \frac{d\Phi_{21}(i_1)}{dt} - w_2 \frac{d\Phi_{22}(i_2)}{dt} , \quad (5.18)$$

welche Strom und Spannung an beiden Klemmen in Beziehung setzen. Diese Gleichungen sind die Grundlage für den Transformator (siehe AEP IV).

5.1.7 Übungsaufgaben zur Durchflutung und Induktion

Aufgabe 5.1.3

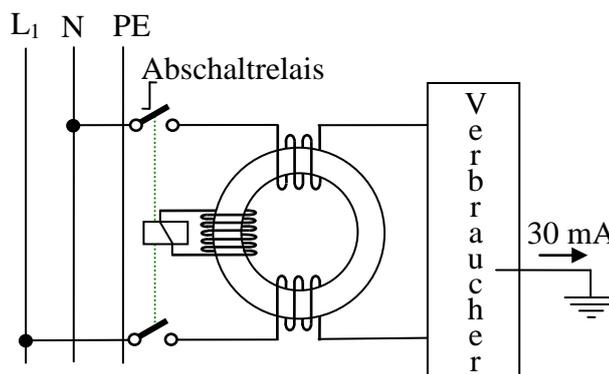


Abb. 5.14: Schematischer Aufbau eines FI-Schalters

Ein FI-Schalter nutzt das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz (Abb. 5.14).

Er schaltet z.B. bei einem Fehlerstrom von 0,03 A den Stromkreis ab.

Frage 1: Wie ist die Funktionsweise eines FI-Schalters?

Frage 2: Welche magnetische Urspannung steht zur Verfügung, wenn 30 mA über die Erde zurückfließen ($w = 5$), und wird mit dem „Rogowskipulenersatz“ (Auslösespule) gemessen?

Aufgabe 5.1.4

Eine angetriebene Kupferscheibe rotiert in einem konstanten Magnetfeld (Unipolarmaschine). Zwei Schleifkontakte (bei r_{innen} und $r_{\text{außen}}$ mit $r_{\text{außen}} - r_{\text{innen}} = l_{\text{Leiter}}$) stellen eine Verbindung zu den Klemmen her (Abb. 5.15).

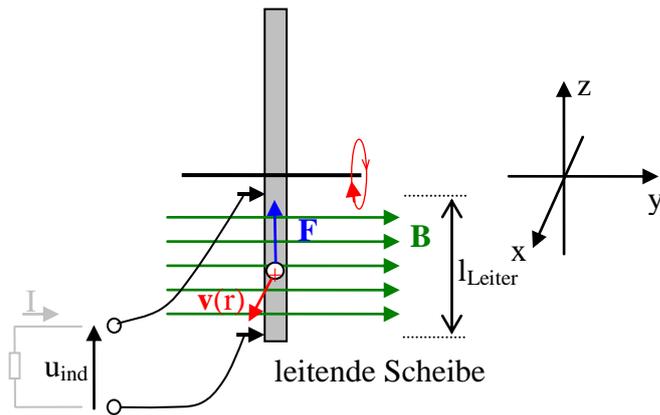


Abb. 5.15: Rotierende Scheibe im Magnetfeld

Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese konkrete Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} ?

Hinweis: Da der Betrag $|v(r)|$ von r abhängt, für jedes „dr“ berechnen und integrieren.

Aufgabe 5.1.5

In einem konstanten Magnetfeld rotiert eine dünne Spule von w Windungen. Die induzierte Spannung wird über Schleifringe abgenommen (Abb. 5.16, die grauen Pfeile zeigen die Rechte-Hand-Regel). Die w Leiterschleifen zeigen nach hinten (z – Richtung, Länge l_z) und sind im Querschnitt zu sehen (Durchmesser $2 r_s$).

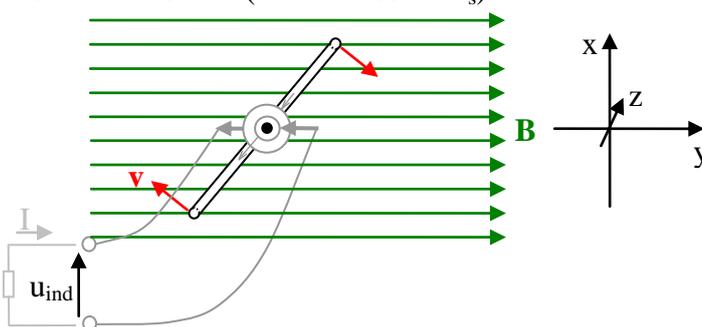


Abb. 5.16: Dünne Spule rotiert im Magnetfeld (Querschnitt)

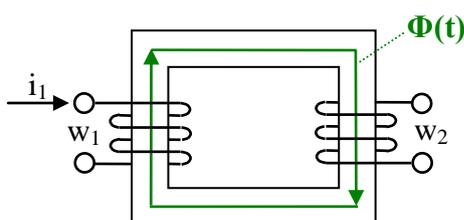
Frage 1: Welche Standpunkte sind für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} jeweils für diese Standpunkte?

Hinweis: Nur die senkrecht zu B stehende Komponente von v liefert einen Beitrag; Kräfte, die senkrecht zum Leiter wirken, können nicht zur induzierten Spannung beitragen. Nur die senkrechte Komponente der Fläche der Spule ergibt den Fluss, der durch die Spule fließt.

Aufgabe 5.1.6

In einem Eisenkreis erzeugt i_1 einen zeitveränderlichen magnetischen Fluss (Abb. 5.17).



$$\begin{aligned}
 i_1 &= (1 \text{ A}) \sin(2\pi 50 \text{ Hz} \cdot t) \\
 w_1 &= 10 \\
 l_{Fe} &= 20 \text{ cm} \\
 A &= 1 \text{ cm}^2 \\
 \mu_r &= 5000 \\
 w_2 &= 100
 \end{aligned}$$

Abb. 5.17: Spule in einem zeitveränderlichen Magnetfeld

Frage 1: Welcher Standpunkt ist für diese Anordnung möglich?

Frage 2: Wie ergibt sich die induzierte Spannung u_{ind} an w_2 (Richtung und Größe)?

Hinweis: Siehe Aufgabe 5.1.1. Alle Flüsse außerhalb des Eisenkerns werden vernachlässigt.

Aufgabe 5.1.7 Zusatzaufgabe

Warum sind Ruhe- und Bewegungsinduktion beide erforderlich? Erläutern Sie in Auswertung von Aufgabe 5.1.4 bis Aufgabe 5.1.6!

Aufgabe 5.1.8

In einem zeitveränderlichen magnetischen Störfluss $B = 0,002 \text{ Vs/m}^2 \sin(2\pi 50 \text{ Hz } t)$ befinden sich über die Länge $l=10 \text{ m}$ eine parallele Zweidrahtleitung (Abstand $d=1 \text{ mm}$), eine verdrehte Zweidrahtleitung (Abstand d , Länge einer Verdrehung 3 cm) und ein Koaxialkabel (Durchmesser $2d$). B entspricht ca. einer direkt daneben liegenden Energieleitung mit 10 A .

Frage: Welche Störspannungen werden bei ungünstigster Orientierung induziert?

Hinweis: Von der verdrehten Zweidrahtleitung befinden sich im ungünstigsten Fall eine ungerade Zahl Verdrehungen im Bereich des Feldes. Das Koaxialkabel kann in viele Leiterschleifen als Kreissegmente $d\alpha$ gedacht werden, deren Spannungen „parallel“ geschaltet sind. Die Dicken der Leiter werden vernachlässigt.

5.2 Koppelfluss, Strom und Spannung an der Spule

5.2.1 Zusammenhang zwischen Koppelfluss, Spannung und Strom

Der Koppelfluss ist der Fluss einschließlich seiner Verkopplung mit den entsprechenden Windungen. Bei 100 % Kopplung ist der Fluss mit allen w Windungen vollständig verkopplert $\Phi_{\text{kop}} = w \Phi$. Aus Messungen des Koppelflusses und des Stromes an den Klemmen einer Spule ergibt sich ein praktisch nutzbarer experimenteller Zusammenhang (Abb. 5.18).

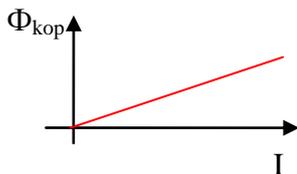


Abb. 5.18: Beispiel einer Messung von Koppelfluss und Strom

Nur ein Teil der technisch verwendeten Materialien ergibt einen linearen Zusammenhang zwischen Koppelfluss und Strom, d.h. $\Phi_{\text{kop}} \sim I$ oder als Geradengleichung: $\Phi_{\text{kop}} = L \cdot I$ mit dem Proportionalitätsfaktor „L“. Der Proportionalitätsfaktor stellt die Induktivität dar, mit der diese Anordnung einer Stromänderung entgegenwirkt.

Definition der Induktivität

$$L = \frac{\Phi_{\text{kop}}}{I} \quad \text{aus der Definitionsgleichung: } \Phi_{\text{kop}} = L \cdot I \quad (5.19)$$

Wie die Kapazität wird die Induktivität aus einem statischen Zusammenhang definiert. Bei nichtlinearem Zusammenhang muss entweder die Funktion $\Phi_{\text{kop}} = \Phi_{\text{kop}}(I)$ oder $L = L(I)$ bzw. $L = L(\Phi_{\text{kop}})$ gefunden werden (je nachdem, was physikalisch sinnvoller ist). Das führt bei ferromagnetischen Materialien zur Hysteresekurve (Weiterführendes siehe [13]).

Auch hier kann eine Bemessungsgleichung für die Induktivität angegeben werden.

Bemessungsgleichung der Induktivität

$$L = \frac{w^2}{R_m} \quad \text{mit } R_m \text{ nach (5.8) } \quad \Phi_{\text{kop}} = w\Phi = \frac{w\Theta}{R_m} = \frac{w^2}{R_m} I \quad (5.20)$$

Ändert sich der Strom an den Klemmen (Zunahme oder Abnahme), muss sich die Spannung entsprechend der Selbstinduktion einstellen. Wird für $u(t) = w \, d\Phi/dt = d\Phi_{\text{kop}}/dt$ der Koppelfluss durch die Beziehung $\Phi_{\text{kop}} = L I$ ersetzt, ergibt sich der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Klemmen.

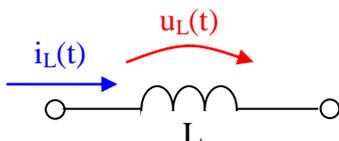


Abb. 5.19 Strom und Spannung an den Klemmen der Induktivität

⁴⁴ Die Maßeinheit Vs/A wird nach Henry mit H bezeichnet.

Strom und Spannung an der Induktivität

$$u_L(t) = \frac{d(L i_L)}{dt} = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{Letzteres für } L = \text{const} \quad (5.21)$$

Ein Vergleich mit dem Ohm'schen Gesetz (3.9) zeigt deutliche Ähnlichkeit, aber bei der Induktivität ist zusätzlich eine Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen. (Ist L nichtlinear $L = L(u)$ oder $L = L(i)$, dann hängt es durch u oder i auch von der Zeit ab.) Die Differentiation muss in diesem Fall nach der Produktenregel erfolgen. (Das ist z.B. bei einigen Anwendungen mit Ferromagneten notwendig.)

Oft wird auch die Umkehrung benötigt:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(t=0) . \quad (5.22)$$

Die Gleichungen (5.21) bzw. (5.22) legen das Verbraucherpfilsystem zugrunde, d.h., bei Stromanstieg ergibt sich eine positive und bei Stromabnahme eine negative Spannung.

Auch bei Induktivitäten gelten Bilanzgleichungen entsprechend der Kirchhoff'schen Sätze. Die Ströme erfüllen zu jedem Zeitpunkt den Knotenpunktsatz und den Maschensatz.

Achtung: Das Folgende gilt bei rein elektrischer Zusammenschaltung, es darf keine zusätzliche magnetische Verkopplung vorliegen!

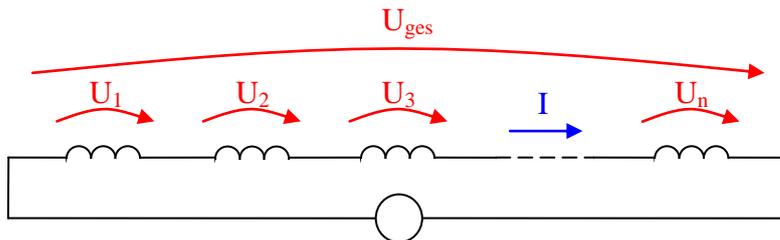


Abb. 5.20: Reihenschaltung von Induktivitäten

Für denselben **Stromanstieg** kann mit dem Maschensatz (3.15) für lineare Bauelemente (es muss (5.21) gelten) geschrieben werden ⁴⁵:

$$\begin{aligned} u_{ges} &= u_1 + u_2 + u_3 \dots + u_n \quad | : di/dt \\ L_{ges} &= L_1 + L_2 + L_3 \dots + L_n \end{aligned} \quad (5.23)$$

und ferner

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_1}{L_1} = \frac{u_2}{L_2} = \frac{u_3}{L_3} \dots = \frac{u_n}{L_n} = \frac{u_{ges}}{L_{ges}} . \quad (5.24)$$

Aus (5.23) ergibt sich der Zusammenhang für eine Reihenschaltung:

Reihenschaltung von Induktivitäten

$$L_{ges} = \sum_v L_v . \quad (5.25)$$

⁴⁵ Eine Darstellung über $\Phi_{kop} = L I$ (also statisch) ist genauso möglich, aber hier umständlicher und ebenfalls nur für lineare Bauelemente gültig.

Aus (5.24) kann die Aufteilung der Spannung zu jedem Zeitpunkt bei linearen Bauelementen für eine Reihenschaltung für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Spannungsteilerregel bei Reihenschaltung

$$\frac{u_1}{u_{ges}} = \frac{L_1}{L_{ges}}$$

(5.26)

In (5.26) wird als Beispiel das Verhältnis von u_1 zu u_{ges} gezeigt. Die Spannungen teilen sich wie das Verhältnis der Induktivitäten auf.

Bei einer Parallelschaltung Abb. 5.21 liegt an allen Induktivitäten **dieselbe Spannung**.

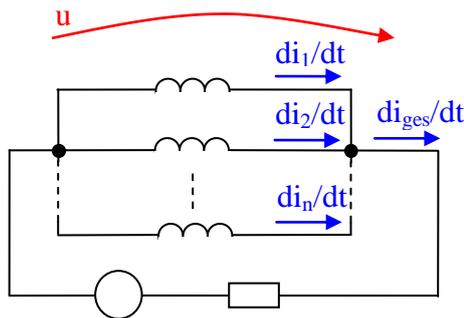


Abb. 5.21: Parallelschaltung von Induktivitäten

Für dieselbe Spannung kann bei linearen Bauelementen geschrieben werden:

$$u = L_{ges} \frac{di_{ges}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_3 \frac{di_3}{dt} \dots = L_n \frac{di_n}{dt}$$

$$\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \dots + \frac{1}{L_n}$$

(5.27)

und ferner
$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_3 \frac{di_3}{dt} \dots = L_n \frac{di_n}{dt} = L_{ges} \frac{di_{ges}}{dt} .$$

(5.28)

Aus (5.27) ergibt sich der Zusammenhang für eine Parallelschaltung von Induktivitäten:

Parallelschaltung von Induktivitäten

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_v \frac{1}{L_v} .$$

(5.29)

Aus (5.28) kann die Aufteilung der Stromanstiege und wegen der linearen Bauelemente auch der Ströme zu jedem Zeitpunkt für die jeweils gewünschte Kombination abgeleitet werden.

Aufteilung bei Parallelschaltung

$$\frac{i_1}{i_{ges}} = \frac{L_{ges}}{L_1}$$

(5.30)

In (5.30) wird als Beispiel das Verhältnis von i_1 zu i_{ges} gezeigt. Die Ströme teilen sich umgekehrt wie das Verhältnis der Induktivitäten auf.

Bei nichtlinearen Bauelementen können keine einfachen Beziehungen angegeben werden, es müssen z.B. die Kennlinien entsprechend **derselben Spannung** (bzw. $\Phi_{kop} = \int u dt$) oder **desselben Stromes** (bzw. $\Theta = i w$) addiert werden.

Wesentlich komplexer werden die Verhältnisse, wenn zusätzlich eine magnetische Verkopplung vorliegt. Hier sollen nur zwei wichtige Beispiele einer Kopplung von 100 % untersucht werden.



Abb. 5.22: Zwei 100 % verkopplte Spulen in Reihenschaltung

In Abb. 5.22 sind die Wicklungen mit gleichem und entgegengesetztem Wicklungssinn in Reihe geschaltet. Bei 100 % Verkopplung verhalten sich diese wie *eine* Wicklung.

$$L_{ges} = \frac{(w_1 \pm w_2)^2}{R_m} = \left(\frac{w_1}{\sqrt{R_m}} \pm \frac{w_2}{\sqrt{R_m}} \right)^2 = (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2 \quad (5.31)$$

Dabei addieren sich die Windungszahlen bei gleichem und subtrahieren sich bei entgegengesetztem Wicklungssinn.

5.2.2 Bauformen und Kenngrößen

Induktivitäten müssen in der Praxis verschiedenen Anforderungen genügen. Der Induktivitätswert ist nur ein Auswahlkriterium. Das zweite Wichtige ist die Strombelastbarkeit der Wicklungen. Bei allen Spulen mit Eisenkernen muss unbedingt die Sättigung beachtet werden. Bei Hochspannungseinsatz spielt die Isolation des Wickeldrahtes und die zwischen den Lagen eine bedeutende Rolle. Zusätzlich stehen Anforderungen wie

- Temperaturstabilität (insbesondere bei Eisen die Sprungtemperatur),
- Baugröße und -form sowie notwendiger Abstand zu anderen magnetischen Materialien oder eigene Streufelder,
- Wicklungswiderstand oder Kapazität zwischen den Windungen sowie die Eisenverluste,
- Stabilität gegen Wetter- und Umgebungsbedingungen.

Für technische („reale“) Induktivitäten kann eine einfache Ersatzschaltung angegeben werden (siehe Abb. 5.23).

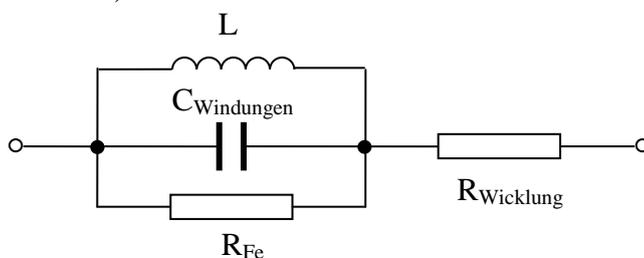


Abb. 5.23: Einfache Ersatzschaltung für eine Spule

Dabei stellt der „Eisenwiderstand“ einen elektrischen **Ersatzwiderstand** für die Verluste im Eisen dar (durch Wirbelstromverluste und Ummagnetisierungsverluste im Eisen). Er ist somit nur aus dem Gesamtverhalten ermittelbar.

Leider sind die parasitären Elemente einer realen Spule meistens nicht zu vernachlässigen. Deshalb findet man bei Spulen in Schaltungsunterlagen oft keine konkreten Angaben.

Es gibt eine Normung für die unterschiedlichsten Kerne (von Trafoblech für 50 Hz bis zu verschiedenen Ferriten für Hochfrequenz) und für Wicklungsmaterial (von Kupferlackdraht für hohe Strombelastung bis zu Litzen für hohe Frequenzen).

Es gibt nicht wie bei Widerständen und Kondensatoren komplette genormte Bauelementereihen, sondern nur konkrete anwendungsbezogene Elemente.

5.2.3 Messung der Induktivität

Bei der Messung der Induktivität müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Messung der statischen Induktivität entsprechend (5.19). Das ist bei nichtlinearen Induktivitäten zur Kennlinienermittlung, wie sie z.B. zur Simulation benötigt wird, erforderlich.
2. Messung der dynamischen Induktivität entsprechend (5.21).

Die statische Kapazität muss durch Messung von $\Phi_{kop} = \int u_L dt$ und dem Strom erfolgen. Daraus ergeben sich $\Phi_{kop} = \Phi_{kop}(I)$ oder $L = L(I)$ und über $\Theta = I w$ auch die Kennlinie für den magnetischen Widerstand $\Phi_{kop} = f(\Theta)$ sowie über Querschnittsflächen und Längen die der Permeabilität $B = f(H)$. Zur Integration kann die Messkurve dem PC übermittelt und dort mit entsprechenden Auswertungsprogrammen bearbeitet werden. (Es ist auch eine graphische Integration oder die Nutzung einer entsprechenden elektronischen Schaltung möglich.)

Die dynamische Induktivität beinhaltet einmal die wirksame Größe bei Wechselstrom einer bestimmten Frequenz (für viele Materialien ist μ frequenzabhängig, insbesondere bei Eisen) und zum anderen bei nichtlinearen Induktivitäten nur die Wechselstromaussteuerung um den Gleichstromarbeitspunkt. Beides ist z.B. für Weicheisenkerne und eine Aussteuerung, die nicht in den Sättigungsbereich reicht, eine brauchbare Näherung.

Mit Multimetern können dynamische Induktivitäten durch eine Strom-Spannungs-Messung mit einer sinusförmigen Wechselspannung ermittelt werden. Ein zusätzliches Oszilloskop sollte dabei den Aussteuerbereich kontrollieren.

Wird auch der „Eisenwiderstand“ benötigt, muss die Phasenverschiebung zwischen U und I ebenfalls bestimmt werden. Sind Wicklungskapazitäten zu berücksichtigen, muss bei zwei Frequenzen gemessen werden (sogar bei mehreren Frequenzen, wenn auch noch eine Frequenzabhängigkeit der Permeabilität vorliegt).

Weiterhin kann der Wicklungswiderstand durch eine Widerstandsmessung bei Gleichstrom ermittelt werden.

Induktivitätsmessbrücken arbeiten nach einem Vergleichsprinzip und realisieren oft verschiedene wählbare Messbedingungen.

5.2.4 Übungsaufgaben zur Induktivität

Aufgabe 5.2.1

Gegeben ist der Stromverlauf an einer Induktivität in Abb. 5.24.

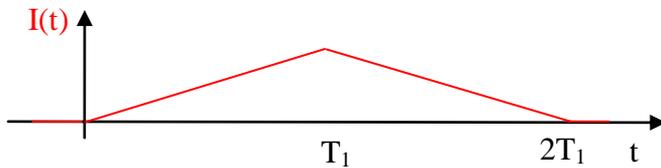


Abb. 5.24: Zeitverlauf des Stromes an einer Induktivität

Frage: Wie sieht der Verlauf der Spannung aus? (In Abbildung einzeichnen!)

Aufgabe 5.2.2

Zur Herstellung einer Induktivität wurden auf den gewählten Spulenkern 10 Windungen gewickelt und danach eine Induktivität von $5 \mu\text{H}$ gemessen.

Frage: Wann reicht so ein Verfahren, um die notwendige Windungszahl zu ermitteln und wie viel Windungen werden in diesem Fall für 1 mH benötigt?

Aufgabe 5.2.3

Berechne den Ein- und den Ausschaltvorgang für den Versuch in Abschnitt 5.2.5!

(Hinweis: Vereinfachen Sie die Schaltung für den Einschaltvorgang so, dass nur eine konstante Quelle, der Widerstand und die Induktivität einen Stromkreis bilden, für den Ausschaltvorgang so, dass nur der Widerstand und die Induktivität einen Stromkreis bilden. Berechnen Sie beide Vorgänge einzeln. Stellen Sie jeweils den Maschensatz auf und setzen das Ohm'sche Gesetz einmal für u_R und dann noch einmal für $u_L = f(i_L)$ ein. Für die DGL 1. Ordnung kann die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen gelöst werden. Die inhomogene Lösung ist $i_L(t \rightarrow \infty)$ und die Anfangsbedingung ist $i_L(t=0)$, d.h. 0 bzw. \hat{U}/R . Der Beginn wird für beide Fälle mit $t=0$ gewählt.)

Darstellung: Spannung und Strom in einem Diagramm!

Zusatzfrage: Wie kann τ aus einer gemessenen Kurve, die dieser Rechnung entspricht, bestimmt werden?

Aufgabe 5.2.4

Eine Leuchtstofflampe hat in gezündetem Zustand ca. 30 V . Mit einer Induktivität soll der Strom auf $0,4 \text{ A}$ begrenzt werden (entspricht 12 W).

Frage: Wie sieht die Schaltung aus und welche Größe hat L ?

Hinweis: $i = \sqrt{2} 0,4 \text{ A} \sin(2\pi 50 \text{ Hz } t)$, $u = \sqrt{2} (230-30 \text{ V}) \cos(2\pi 50 \text{ Hz } t)$ (d.h. 90° vor)

Aufgabe 5.2.5

Für eine Spule mit einem sehr kleinen Wicklungswiderstand soll der Eisenwiderstand ermittelt werden. Bei 200 V wird ein Strom von $0,4 \text{ A}$ gemessen und der Strom läuft 87° nach.

Frage: Wie groß sind Induktivität und Eisenwiderstand?

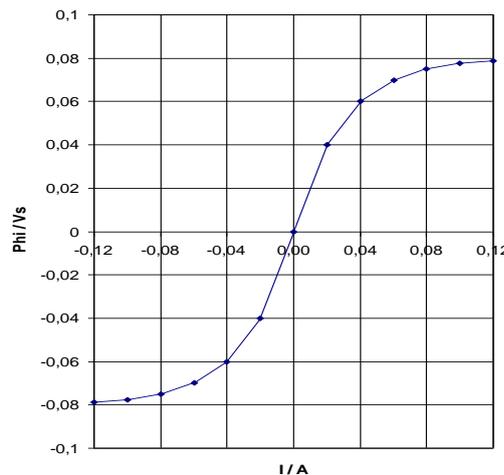
Hinweis: Mit der speziellen Form der Additionstheoreme

$a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega t - \varphi)$ bei $\tan \varphi = b/a$ bzw. $\cos \varphi = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ ergeben a , b und $\sqrt{a^2 + b^2}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel φ . Damit kann der Strom in einen Anteil mit -90° (d.h. Strom durch L) und einen mit 0° (d.h. Strom durch R) Verschiebung zu $u(t)$ aufgeteilt werden.

Aufgabe 5.2.6

Die Hysteresekurve eines Trafokerns (sehr gutes Weicheisen, d.h., aufsteigender und absteigender Ast fallen in der Darstellung zusammen) wurde gemessen (siehe Tabelle und Skizze).

$\Phi_{\text{kop}}/\text{Vs}$	I/A
-7,88E-02	-1,20E-01
-7,75E-02	-1,00E-01
-7,50E-02	-8,00E-02
-7,00E-02	-6,00E-02
-6,00E-02	-4,00E-02
-4,00E-02	-2,00E-02
0,00E+00	0,00E+00
4,00E-02	2,00E-02
6,00E-02	4,00E-02
7,00E-02	6,00E-02
7,50E-02	8,00E-02
7,75E-02	1,00E-01
7,88E-02	1,20E-01



Frage 1: Wie groß ist im linearen Bereich $-0,02 \text{ A} < I < 0,02 \text{ A}$ die Induktivität?

Frage 2: Wie groß ist im Sättigungsbereich die dynamische Induktivität (nutzen Sie die beiden obersten Messpunkte)?

(Hinweis: Aus (5.21) folgt $d\Phi_{\text{kop}}/dt = d(L i)/dt$ und bei Übergang zu Differenzen $\Delta\Phi_{\text{kop}} = L(I) \Delta I$.)

Frage 3: Welche Konsequenzen sind daraus abzuleiten?

5.2.5 Messung von Zeitverläufen an der Induktivität

Es sollen im Messlabor die Zeitverläufe von Strom und Spannung an einer Spule untersucht werden (Vorschaltgerät einer Hochdrucklampe 300 mH bei 50 Hz).

Versuchsaufbau:

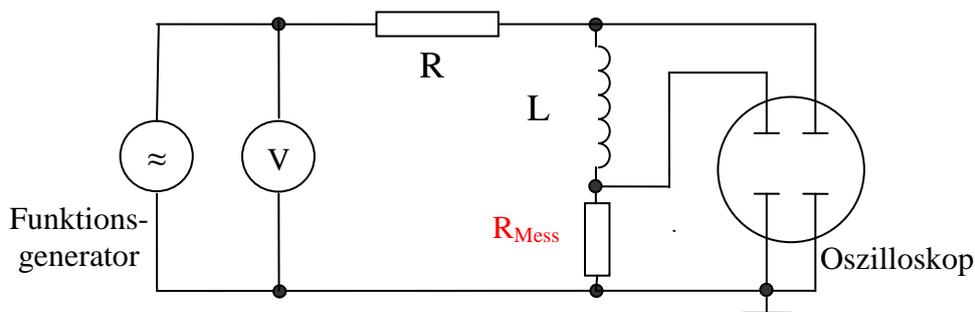


Abb. 5.25: Schaltung des Versuchsaufbaus

(Hinweise: Als Messwiderstand (R_{Mess}) zur Strommessung werden 10Ω eingesetzt. Alle Spannungen sind als Spitze-Spitze-Werte vom Oszilloskop abzulesen.)

Versuchsdurchführung:

Eine Rechteckspannung vom Funktionsgenerator bewirkt einen Stromanstieg (Einschaltvorgang, U_{Quelle} wird \hat{U}) und Stromabfall (Ausschaltvorgang, U_{Quelle} wird 0, d.h. Kurzschluss) der Induktivität über den Widerstand. Auf dem Oszilloskop werden gleichzeitig Strom und Spannung (Zweikanalbetrieb) dargestellt.

Die Kurven können einem PC übergeben und ausgewertet werden. Aus den gemessenen Zeitverläufen sind die Zeitkonstanten zu ermitteln und mit den Bauteilparametern zu vergleichen.

(Hinweis: Die Frequenz ist so zu wählen, dass die Vorgänge etwa ihren jeweiligen Endzustand erreichen – Richtwert 300 Hz.)

Bei 3. ist eine Sinusspannung einzustellen.

Folgende Untersuchungen geben einen Überblick über das Verhalten:

1. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:
 $U_{\text{SS}} = 5 \text{ V}$ mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $3,3 \text{ k}\Omega$
2. Darstellung der Ein- und Ausschaltvorgänge für:
 $U_{\text{SS}} = 5 \text{ V}$ und $2,5 \text{ V}$ mit $R = 1 \text{ k}\Omega$
3. Darstellung der Zeitverläufe bei sinusförmiger Spannung:
 $U_{\text{SS}} = 5 \text{ V}$ bei $f = 1 \text{ kHz}$ $R = 1 \text{ k}\Omega$
Es sind Amplitude und Zeitverschiebung zu untersuchen.

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass sich der Strom erst langsam aufbaut (dagegen hat die Spannung sofort die volle Größe und nimmt in gleichem Maße ab) bzw. abbaut (während die Spannung sofort die volle Größe in die negative Richtung annimmt und ihr Betrag wiederum in gleichem Maße abnimmt).
2. Je größer der Widerstand (bzw. die Induktivität) ist, desto kürzer (bzw. länger) dauert der Stromanstieg bzw. -abfall. Der Zeitverlauf (die Dauer, die Zeitkonstante) hängt nicht von der Spannung der Quelle ab, sondern nur der Endstrom.
3. Bei sinusförmiger Spannung läuft der Strom genau $\frac{1}{4}$ Periodendauer (90°) gegenüber der Spannung am Kondensator hinterher.
4. Eine mathematische Auswertung erfolgt mit Aufgabe 5.2.3.
5. Die entscheidende Kenngröße ist die Zeitkonstante $\tau = L/R$.
6. Die Induktivität von 300 mH wird bei 300 bis 1000 Hz von diesem Kernmaterial nicht erreicht.

5.3 Energie und Kräfte im magnetischen Feld

5.3.1 Beschreibung von Energie und Kräften

Die **Energie** für den Stromanstieg einer Induktivität ergibt sich ebenfalls nach (3.24) zu:

$$W = \int_0^I u_L(t) i_L(t) dt . \tag{ 5.32 }$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an den Klemmen der Induktivität (5.21) wird daraus:

$$W = \int_0^{I_L} i_L(t) L di_L = L \frac{I_L^2}{2} \quad \text{und mit } \Phi_{kop} = L I \text{ wird}$$

$$W = \frac{L I_L^2}{2} = \frac{\Phi_{kop} I_L}{2} = \frac{\Phi_{kop}^2}{2 L} \tag{ 5.33 }$$

Diese Energie ist in der Induktivität **gespeichert**, wenn sie Φ_{kop} und I_L erreicht hat.

Wenn die **mittlere Leistung** über Anstieg und Abfall des Stromes berechnet wird, ergibt dies $\bar{P} = \overline{u_L(t) i_L(t)} = 0$, d.h., es wird keine Leistung umgesetzt. Es erfolgt nur ein Hin- und Herspeichern von Leistung. Beim Anstieg wird magnetische Energie im Feld der Induktivität gespeichert und beim Abfall wird diese Energie zurückgegeben. (Lediglich der Transport durch die Leitungen und R_L führt durch deren Widerstand zu Verlusten.) Heute wird dieser Effekt für eine kurzzeitige Energiespeicherung insbesondere in der Leistungselektronik, aber auch in Schaltnetzteilen genutzt.

Im magnetischen Feld existieren zwei Erscheinungsformen für **Kraftwirkungen**

1. Kräfte auf **bewegte** Ladungen und
2. Kräfte auf Grenzflächen verschiedener Materialien (insbesondere Eisen – Luft).

Für **Kräfte auf bewegte Punktladungen** ist die Lorentzkraft (5.12) zu nutzen.

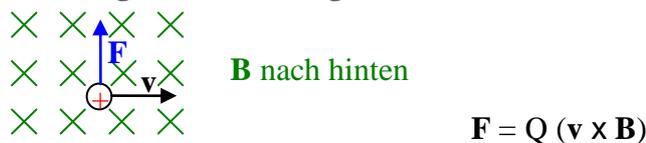


Abb. 5.26: Kraft auf eine positive Punktladung im magnetischen Feld

Wenn die bewegte Ladung ein Strom I_2 ist, wird

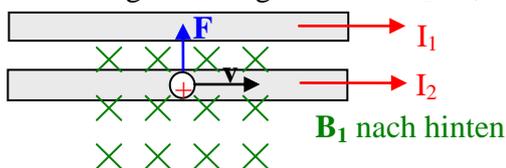


Abb. 5.27: Strom I_2 im Feld B_1 bzw. eines Stromes I_1

für $I_2 = S_2 \cdot A = \rho v_2 \cdot A = (Q/l_{Leiter})v_2$ und damit $Q v_2 = I_2 l_{Leiter}$ und es folgt:

$$F = I_2 l_{Leiter} \times B_1 = B_1 I_2 l_{Leiter} \quad \text{mit Richtung } l_{Leiter} = \text{Richtung von } I_2 \tag{ 5.34 }$$

Wenn das Feld weiterhin vom Strom I_1 erzeugt wird, folgt der Betrag der Kraft mit (5.11)

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi r} \mathbf{l}_{\text{Leiter}} \quad \text{mit} \quad |B_1| = \mu I_1 / 2\pi r . \quad (5.35)$$

Die gleiche Kraft wirkt natürlich auch auf den anderen Leiter. Deshalb ist (5.35) auch symmetrisch für beide Ströme.

Bei Kräften auf eine bewegte Ladung oder einen Strom werden diese wiederum **im ungestörten Feld der anderen bewegten Ladung** (des anderen Stromes) betrachtet. Es werden nicht zuerst die Veränderungen des Feldes berücksichtigt.

Für Magnetfelder besteht ebenfalls das **Superpositionsprinzip**.

Die Kraft auf eine bewegte Ladung wird zur Ablenkung von geladenen Teilchen in Bildröhren und bei Teilchenbeschleunigern genutzt. Sie ist auch die Ursache der Strahlungsgürtel in der Erdatmosphäre.

Gleichung (5.34) ist eine wesentliche Grundlage für elektrische Maschinen.

Auf der Basis von (5.35) können elektromechanische Messinstrumente gebaut werden, die ein Produkt ($u \cdot i$, i^2 , u^2) benötigen.

Kräfte auf Grenzflächen werden günstiger aus der Energieerhaltung bestimmt.

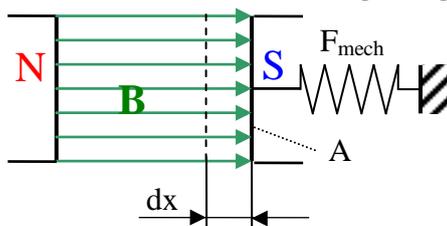


Abb. 5.28: Kräftegleichgewicht mechanische – magnetische Kraft

Die Kraft des magnetischen Feldes auf den Südpol verkürzt den Abstand der Pole, bis die Federkraft gleich ist. Nun gilt folgende Energiebilanz, wenn Φ konstant bleibt (mit (5.33) für die magnetische Energie, für L wird (5.20) und für R_m (5.8) eingesetzt):

verringerte magnetische Energie = mechanisch in der Feder gespeicherte Energie

$$\Delta W_{\text{magn}} = \frac{\Phi_{\text{kop}}^2 dx}{2 w^2 \mu_0 A} \left(\frac{1}{\mu_{\text{rLuft}}} - \frac{1}{\mu_{\text{rFe}}} \right) = F_{\text{mech}} dx .$$

Damit ergibt sich (mit $B = \Phi/A$, $\Phi_{\text{kop}}/w = \Phi$ und $\mu_{\text{rFe}} \gg \mu_{\text{rLuft}}$) der Betrag der Kraft auf die Grenzfläche zu:

$$F = \frac{B^2}{2 \mu_0} A = \frac{B H}{2} A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A \quad (5.36)$$

Im Falle einer Grenzschicht zwischen zwei ähnlichen Materialien muss die Differenz von ΔW_{magn} des vorherigen und des nachherigen Materials belassen werden.

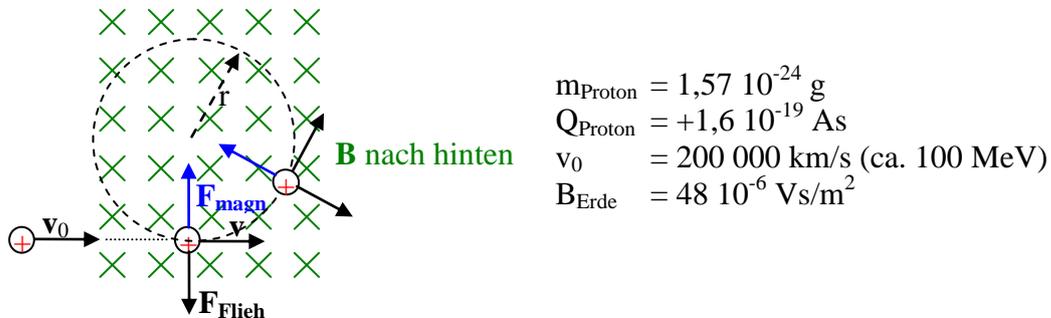
Die **Richtung der Kraft** ist immer so, dass sich die Flussdichtelinien im für den Fluss schlechteren Medium verkürzen.

Diese Kraft ist die Grundlage für eine breite technische Nutzung (vom Relais bis zum Kraftmagneten).

5.3.2 Übungsaufgaben zu Kräften im Magnetfeld

Aufgabe 5.3.1

Berechnung der Bahn einer bewegten Punktladung (Proton) im Magnetfeld der Erde (Strahlungsgürtel).



$$\begin{aligned}
 m_{\text{Proton}} &= 1,57 \cdot 10^{-24} \text{ g} \\
 Q_{\text{Proton}} &= +1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \\
 v_0 &= 200\,000 \text{ km/s (ca. 100 MeV)} \\
 B_{\text{Erde}} &= 48 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/m}^2
 \end{aligned}$$

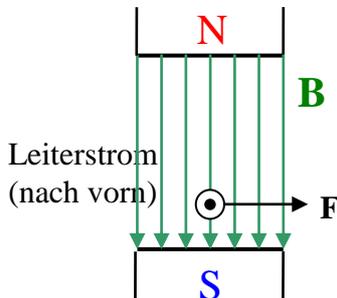
Abb. 5.29: Eintritt und Bahn eines Protons im Erdmagnetfeld

Frage: Wie groß ist der Radius der Kreisbahn?

Hinweis: Der Radius folgt aus dem Kräftegleichgewicht einer Kreisbahn:
Lorentzkraft (= Beschleunigungskraft zum Zentrum) = Fliehkraft.

Aufgabe 5.3.2

Berechnung der Kraft eines Leiterstabes (vom Anker eines Motors) im Feld eines Permanentmagneten (Stator eines Motors).



$$\begin{aligned}
 B &= 1 \text{ Vs/m}^2 \\
 I &= 1 \text{ A} \\
 l_{\text{Leiter}} &= 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Abb. 5.30: Leiterstab im Magnetfeld

Frage: Wie groß ist die Kraft auf diesen einen Stab (Leiter)?

Aufgabe 5.3.3

Kraft auf einen Magnetpol in der Anordnung von Abb. 5.30 (Polfläche nach hinten 1 cm^2 und μ_{Luft} ca. $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$ sowie $1/\mu_{\text{Fe}}$ ca. Null).

Frage: Wie groß ist die Kraft auf die Grenzfläche Luft – Pol?

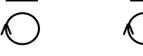
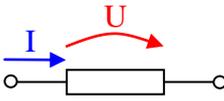
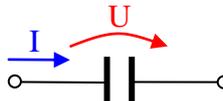
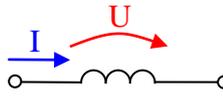
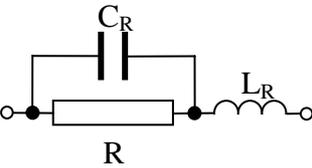
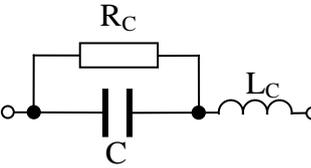
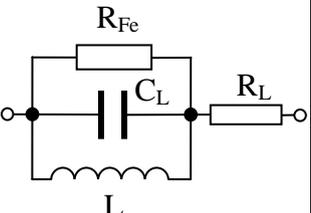
6 Zusammenfassung und Gegenüberstellung

6.1 Gegenüberstellung der Grundgrößen

Bezeichnung	Vorgänge im elektrischen Leiter (Strömungsfeld)	Vorgänge im elektrischen Nichtleiter (elektrostatisches Feld)	Vorgänge im Magnetfeld
Ladung Naturgröße	$Q = \int_{\text{Dauer}} I \cdot dt$	$Q = N \cdot q_0 = \int_V \rho \, dV$ $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}$ $[Q] = C = \text{As}$	
Fluss- bzw. Stromgröße	$I = dQ/dt$ $I = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ $[I] = A$	Ψ $\Psi_{\text{ges}} = Q$ $\Psi = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ $[\Psi] = \text{As}$	Φ $\Phi_{\text{kop}} = w \Phi$ $\Phi = \int_{\text{Fläche}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ $[\Phi] = \text{Wb} = \text{Vs}$
Knotenpunktsatz	$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{innerhalb}}$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$
Flussdichte bzw. Stromdichte	\mathbf{S} $ \mathbf{S} = dI/dA$ $\mathbf{S} = \mathbf{v}_d \rho$ $[S] = A/m^2$	\mathbf{D} $ \mathbf{D} = d\Psi/dA$ $[D] = \text{As}/m^2$	\mathbf{B} $ \mathbf{B} = d\Phi/dA$ $[B] = T = \text{Vs}/m^2$
Feldstärke	$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p$ $ \mathbf{E} = dU/dl$ $[E] = V/m$	$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_p$ $ \mathbf{E} = dU/dl$ $[E] = V/m$	\mathbf{H} $ \mathbf{H} = dV_m/dl$ $[H] = A/m$
Spannungsgr. Ursprung	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ $[U] = V$	$U = \Delta W_{Ab}/Q_p$ $E_o = \Delta W_{Zu}/Q_p$ $U = \int_{\text{Weg}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ $[U] = V$	V_m $\Theta = I w = \sum I_{\text{umf}}$ $V_m = \int_{\text{Weg}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ $[V_m] = A$
Maschensatz	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_0$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_0$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Theta$ Durchflutungsgesetz
Beziehung Flussdichte und Feldstärke	$\mathbf{S} = \kappa \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
Materialkonstante	$\kappa = \text{spez. Leitw.},$ $\rho = \text{spez. Wid.}$	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ $\epsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$	$\mu = \mu_0 \mu_r$ $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{Vs/Am}$

Beziehung Flussgr. und Spannungsgr.	$U = R I$ $I = G U$	$U = (1/C) Q$ $Q = C U$	$V_m = R_m \Phi$ $\Phi = (1/R_m) V_m$
Definition:	$R = U/I$ $[R]=\Omega = V/A$	$C = Q/U$ $[C]=F=As/V$	$R_m = V_m/\Phi$ $[R_m]=A/Vs$
Bemessung: homogene Verhältnisse	$R = \frac{l}{\kappa A} = \frac{\rho l}{A}$	$C = \frac{\epsilon A}{d}$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$
Bez. Flussgr. u. el. Größe	$(I = G U)$	$Q = C U$	$w\Phi = L I$
Induktion Def. Induktivität: Bemessung Induktivität:			$u_{ind} = w \frac{d\Phi}{dt} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$ $L = w\Phi/I$ $L = w^2/R_m$ $[L]=H = Vs/A$
Energie	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ Verlustenergie $W_{12} = U I t_{12}$ für $u, i = \text{const}$ $[W]=Ws=VA$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ gespeichert bei Q, U $[W]=Ws=VA$	$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$ gespeicherte Energie $W = \frac{\Phi_{kop} I}{2} = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi_{kop}^2}{2L}$ gespeichert bei Φ_{kop}, I $[W]=Ws=VA$
Leistung	$p(t) = dW/dt = u i$ $P = UI = U^2/R = I^2 R$ für $u, i = \text{const}$ $[P]=W=VA$	$p(t) = u i$	$p(t) = u i$
Kräfte auf Ladungen bzw. Strom bzw. zwischen Q bzw. I auf Grenz- flächen	nicht direkt	$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}$ $\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}$ Coulomb'sches Gesetz $\mathbf{F} = \frac{Q^2}{2A} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$ $= \frac{D^2}{2\epsilon_0} A = \frac{DE}{2} A = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} A$	$\mathbf{F} = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ $\mathbf{F} = \frac{\mu}{2\pi r} I_1 I_2$ $\mathbf{F} = \frac{\Phi^2}{2A} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right)$ $= \frac{B^2}{2\mu_0} A = \frac{BH}{2} A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A$

Für linienhafte Anordnungen:

Knotenpunkt-satz	$\sum_{\uparrow} I_v = \sum_{\downarrow} I_{\mu}$	$\sum_{+} Q_v = \sum_{-} Q_{\mu}$	$\sum_{\uparrow} \Phi_v = \sum_{\downarrow} \Phi_{\mu}$
Maschensatz	$\sum U_v = \sum E_{0\mu}$ 	$\sum U_v = \sum E_{0\mu}$ 	$\sum V_{mv} = \sum \Theta_{\mu}$ 
Teilung Fluss	$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$ Bedingung: U=const	$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$ Bedingung: U=const	$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}}$ Bedingung: V _m =const
Teilung Spannung	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$ Bedingung: I=const	$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$ Bedingung: Q=const	$\frac{V_{m1}}{V_{m2}} = \frac{R_{m1}}{R_{m2}}$ Bedingung: Φ=const
Reihenschaltung	$R_{ges} = \sum_v R_v$	$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_v \frac{1}{C_v}$	$R_{m\ ges} = \sum_v R_{mv}$ $L_{ges} = \sum_v L_v$
Parallelschaltung	$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_v \frac{1}{R_v}$	$C_{ges} = \sum_v C_v$	$\frac{1}{R_{m\ ges}} = \sum_v \frac{1}{R_{mv}}$ $\frac{1}{L_{ges}} = \sum_v \frac{1}{L_v}$
Symbol			
Beziehung an den Klemmen des idealen Bauelementes	$u = i R$ $i = u / R$	$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$
technisches Bauelement einfache Ersatzschaltung	 C_R Kappenkapazität L_R Wicklungsindukt.	 R_C Verlustwid. des Diel. L_C Wickelinduktivität	 R_L Drahtwiderstand R_{Fe} Verlustwid. Eisen C_L Windungskapazität

6.2 Fortführungen zu den theoretischen Grundlagen

In den Abschnitten 2, 3, 4 und 5 wurden die theoretischen Grundlagen dargelegt, wie sie für Anwendungen in der Elektrotechnik und Elektronik benötigt werden. Dazu gehören

- ein grundlegendes Verständnis von Feldern und ihren Eigenschaften,
- Verständnis und Kenntnisse zu Spannungs- bzw. Stromquellen,
- Verständnis und Kenntnisse über die passiven Bauelemente Widerstand, Kapazität und Induktivität,
- Verständnis und Kenntnisse über die Vorgänge in elektrischen Stromkreisen und deren Berechnung und
- Verständnis und Kenntnisse der Messung der betreffenden Größen.

Weiterführende Darstellungen und Untersuchungen sind der Literatur (insbesondere [12]) zu entnehmen.

Die Felder wurden für ein grundlegendes Verständnis nur einzeln und vorwiegend stationär behandelt. Für Vorgänge mit Gleichstrom und niedrigen Frequenzen ist das vertretbar. Bei Stromkreisen mit höheren Frequenzen (z.B. mit Problemen der Wellenleitung in Kabeln von Kommunikationsnetzen) und insbesondere bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen müssen die Felder in ihrer gegenseitigen Verkopplung betrachtet werden. Das wird in der Regel im Lehrfach „Theoretische Elektrotechnik“ oder mehr physikalisch orientiert „Elektrodynamik“ vorgenommen und erfordert eine aufwendige mathematische Darstellung mit Hilfe der Vektor- oder sogar Tensoranalysis.

Interessierte finden dazu in [14] eine sehr tiefgehende und vollständige Darlegung.

Die Anwendung der oben aufgelisteten Kenntnisse in elektrischen Stromkreisen, Schaltungen und Netzwerken wird im folgenden Abschnitt 7 weitergeführt. Aktive Bauelemente und ihre Anwendungen (Halbleiterbauelemente, analoge und digitale Schaltungen) folgen in AEP II.

7 Analyse elektrischer Stromkreise und Netzwerke

7.1 Grundstromkreis

7.1.1 Analyse eines Grundstromkreises

Ein Grundstromkreis besteht aus dem einfachsten aktiven und dem einfachsten passiven Zweipol.

Aktive Zweipole sind eine Zusammenschaltung mehrerer Bauelemente einschließlich Spannungs- und/oder Stromquellen (aber mit mindestens einer) an zwei äußeren elektrischen Anschlussklemmen.

Der **einfachste** aktive Zweipol besteht aus einer **idealen Quelle** (U_0) und einem Element zur Darstellung der inneren Verluste (**Innenwiderstand** R_i).

Passive Zweipole sind eine Zusammenschaltung mehrerer Bauelemente ohne Spannungs- und/oder Stromquellen an zwei äußeren elektrischen Anschlussklemmen.

Der **einfachste** passive Zweipol besteht aus einem Element zur Darstellung der Energieumwandlung (Lastwiderstand oder **Außenwiderstand** R_a).

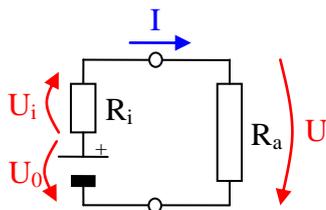


Abb. 7.1: Grundstromkreis

Eine Analyse des Grundstromkreises (Abb. 7.1) verdeutlicht in repräsentativer Weise viele Zusammenhänge und Probleme aller Stromkreise der verschiedensten Anwendungen und wird deshalb an den Anfang gestellt.

Kennlinien stellen die Betriebszustände eines Elementes, Gerätes oder einer Anlage dar.

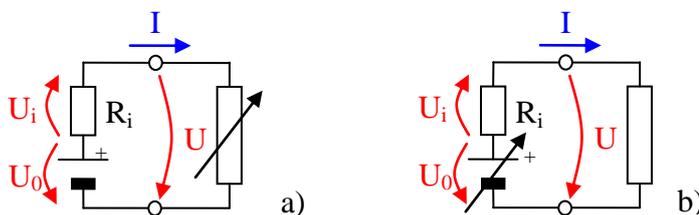


Abb. 7.2: Messanordnung für die Kennlinien eines a) aktiven und b) passiven Zweipols

Kennlinie und Parameter des aktiven Zweipols

Nach Abb. 7.2 a) folgt die Kennlinie durch Verändern der Testlast im Bereich der zulässigen Belastung (im Idealfall von $0 \leq R_a < \infty$). Der Maschensatz (Umlauf im Uhrzeigersinn) wird

$$0 = U_i + U - U_0$$

und mit $U_i = R_i I$ ergibt sich die **Kennlinie des aktiven Zweipols** zu:

$$U = U_0 - R_i I \quad (7.1)$$

In (7.1) treten drei besondere Fälle auf (siehe auch Abb. 7.3).

- Für $I = 0$ (kein Laststrom, $R_a = \infty$), d.h. **Leerlauf**, wird die Klemmenspannung zur Leerlaufspannung $U_L = U(I=0) = U_0$ (größtmögliche Klemmenspannung, $R_a = \infty$).
- Für $U = U_i$ (bei $R_a = R_i$), d.h. **Anpassung** (gleich große innere Verluste wie der Umsatz am Lastwiderstand), wird $U = U_0/2$ und $I = I_k/2$.
- Für $I = I_k$ (Kurzschlussstrom, größtmöglicher Laststrom, $R_a = 0$), d.h. **Kurzschluss**, wird die Klemmenspannung zu $U(I=I_k) = 0$.

Dabei sind drei Parameter des aktiven Zweipols (U_0 , R_i und I_k) erkennbar. Zwei dieser Parameter sind unabhängig, während sich der jeweils dritte aus den beiden anderen ergibt (gemäß $U_0 = R_i I_k$). D.h., der aktive Zweipol wird durch **zwei Parameter** eindeutig gekennzeichnet.

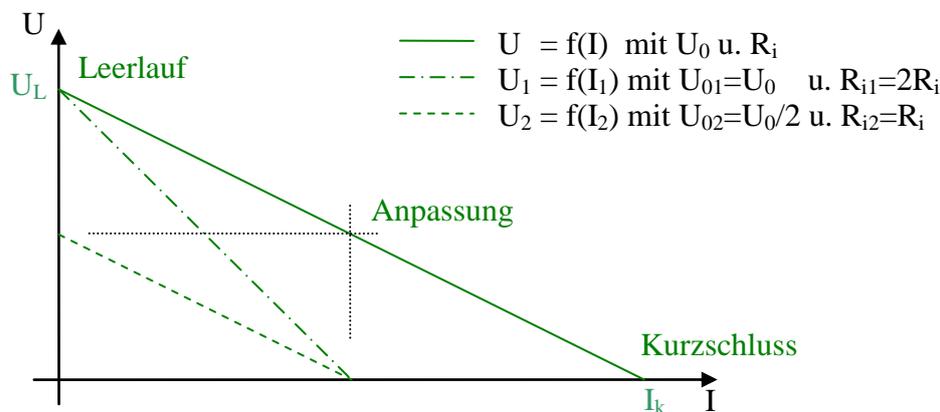


Abb. 7.3: Kennlinie des aktiven Zweipols

In Abb. 7.3 wurden zur Verdeutlichung des Einflusses von U_0 und R_i auf den Kurvenverlauf die Kennlinien mit $U_0/2$ bzw. $2R_i$ zusätzlich dargestellt.

Kennlinie und Parameter des passiven Zweipols

Nach Abb. 7.2 b) folgt die Kennlinie durch Verändern der Spannung einer Testquelle im Bereich der zulässigen Belastung des passiven Zweipols (von $0 \leq U \leq U_{\max}$ oder $U\{I=I_{\max}\}$). Am Widerstand R_a wird nach dem Ohm'schen Gesetz die **Kennlinie des passiven Zweipols**:

$$U = I R_a \quad (7.2)$$

Mit R_a wird der passive Zweipol durch **einen Parameter** eindeutig gekennzeichnet.

Der **Schnittpunkt der Kennlinien** eines passiven und eines aktiven Zweipols erfüllt beide Gleichungen, d.h. (7.1) und (7.2). Er kennzeichnet den **Arbeitspunkt**, der sich beim Zusammenschalten dieser beiden Zweipole infolge des Gleichgewichts zwischen ihnen einstellt (siehe Abb. 7.4).

Zur Messung der Kennlinie wird durch Variation des Arbeitspunktes (Verändern der Testlast bzw. der Testquelle) die Kennlinie durchlaufen und folglich ermittelt. Im Fall, dass die Kennlinien Geraden sind, reichen minimal zwei Messpunkte aus. Praktisch wird durch weitere Messpunkte die Kennlinie überprüft. Dabei sollten die drei besonderen Fälle (so exakt wie möglich) enthalten sein. Weitere Gesichtspunkte siehe Abb. 7.8.

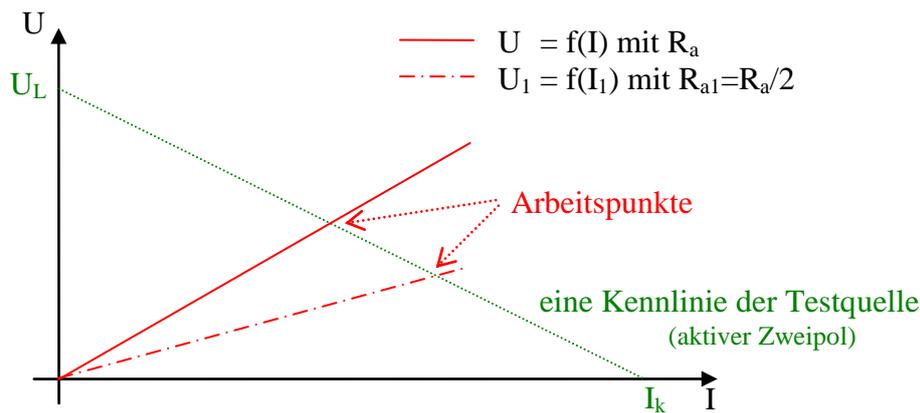


Abb. 7.4: Kennlinie des passiven Zweipols

In Abb. 7.4 wurde zur Verdeutlichung des Einflusses von R_a auf den Kurvenverlauf die Kennlinie $R_a/2$ zusätzlich dargestellt.

Entsprechend dem Verhalten an den Klemmen (siehe Gleichung (7.1) bzw. Abb. 7.3) kann ein **aktiver Zweipol** durch zwei **elektrisch gleichwertige Ersatzschaltungen** dargestellt werden.

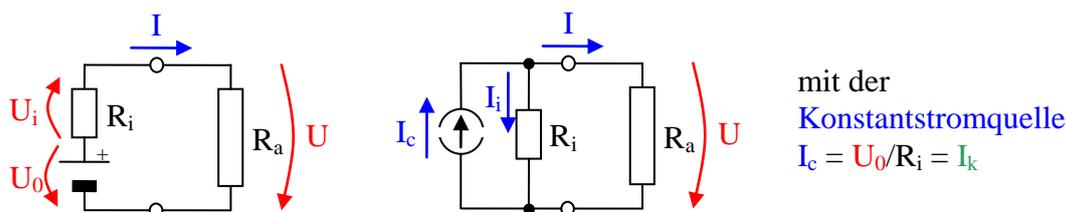


Abb. 7.5: Die zwei Ersatzschaltungen des aktiven Zweipols

Auch hier sind drei Parameter des aktiven Zweipols (I_c , R_i und U_L)⁴⁶ erkennbar. Genauso sind nur zwei dieser Parameter unabhängig, während sich der jeweils dritte aus den beiden anderen ergibt (gemäß $U_L = R_i I_c$).

Die beiden Ersatzschaltungen sind **nicht gleichwertig** gegenüber dem Prozess der **Energiewandlung**. Wie in Abb. 7.5 zu erkennen ist, ergibt sich für die Spannungsquellen-Ersatzschaltung bei Leerlauf ($R_a = \infty$) keine Verlustleistung an R_i . Dagegen folgt für die Stromquellen-Ersatzschaltung an R_i die Verlustleistung $P_v = U_L I_i = U_L I_c$, die durch die Energiewandlung (z.B. aus dem Mechanischen) aufgebracht werden muss. Umgekehrt ist es im Fall des Kurzschlusses ($P_v = U_i I_k = U_0 I_k$ bzw. $P_v = 0$).

In der Praxis vorkommende Quellen entsprechen zum größten Teil der Spannungsquellen-Ersatzschaltung (z.B. chemische Batterien, Akkus, Generatoren). Es existieren aber auch Quellen, die mehr der Stromquellen-Ersatzschaltung entsprechen. Das praktisch wichtigste Beispiel ist die Solarbatterie⁴⁷ (siehe AEP II, vergleiche [15]), aber auch der Bandgenerator und die Influenzmaschine⁴⁸ gehören dazu.

Auch im praktischen Einsatz von Quellen werden von den dargestellten einfachsten Ersatzschaltungen die wesentlichen Eigenschaften wiedergegeben. Es kommen aber Effekte wie Selbstentladung, Alterung, Temperaturabhängigkeiten u.Ä. dazu. Darüber hinaus gibt es Quellen mit nichtlinearen Kennlinien (z.B. die Solarbatterie).

⁴⁶ Beachte, dass $U_0 = U_L$ und $I_c = I_k$ sind (entspr. der Bauelemente- bzw. der gemessenen Kennlinienparameter).

⁴⁷ Die Solarbatterie nimmt auch im Leerlauf alle Lichtleistung auf und erwärmt sich entsprechend. Sie kann im Gegensatz zu anderen Quellen immer auch im Kurzschluss (kaum innere Verluste) betrieben werden.

⁴⁸ Beide werden nur noch bei Demonstrationsexperimenten eingesetzt.

Analyse des Verhaltens des aktiven Zweipols in Abhängigkeit vom Lastwiderstand

Werden die verschiedenen Größen des Grundstromkreises (U_0 , U_i , U , I , P_{ges} , P_i , P_a und η) über dem Lastwiderstand R_a dargestellt, sind eine Reihe grundlegender Zusammenhänge deutlich zu erkennen. Abb. 7.6 zeigt die entsprechende Messschaltung.

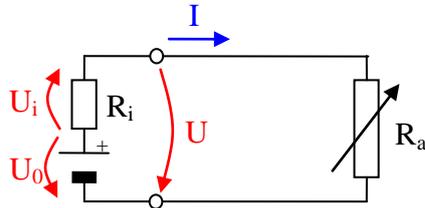


Abb. 7.6: Aktiver Zweipol mit veränderlichem Lastwiderstand (Schaltung)

$I =$		$U_0 / (R_i + R_a)$	$= U / R_a = U_i / R_i$
$U =$	$I R_a =$	$U_0 R_a / (R_i + R_a)$	oder $U / U_0 = R_a / (R_i + R_a)$
$U_i = U_L - U =$	$I R_i =$	$U_0 R_i / (R_i + R_a)$	oder $U_i / U_0 = R_i / (R_i + R_a)$

(7.3)

aus Messwerten
aus Berechnung

Aus dem Maschensatz und dem Ohm'schen Gesetz folgen die Gleichungen (7.3). Die Größen können direkt aus den Messwerten (U , $U\{I=0\}$ und I) ermittelt bzw. aus den Bauelementeparametern berechnet werden (Darstellungen in Abb. 7.7).

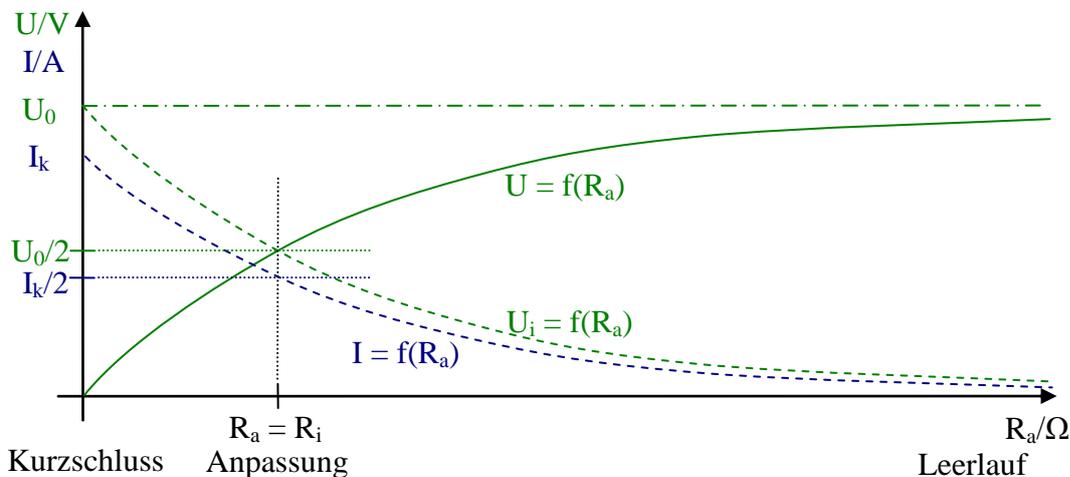


Abb. 7.7: Aktiver Zweipol in Abhängigkeit vom Lastwiderstand (Diagramme U, I)

Nach (3.25) und (3.26) können die Verlustleistungen am Innenwiderstand, die abgegebene Leistung am Außenwiderstand sowie der Wirkungsgrad bestimmt werden. Diese werden einmal direkt aus den Messwerten (U , $U\{I=0\}$ und I) ermittelt bzw. zum anderen aus den Bauelementeparametern berechnet, siehe Gleichungen (7.4).

$P =$	$I U$	$= U_0^2 R_a / (R_i + R_a)^2$	
$P_i = I U_i$	$= I (U_L - U)$	$= U_0^2 R_i / (R_i + R_a)^2$	
$\eta = P / (P + P_i)$	$= U / U_L$	$= R_a / (R_i + R_a)$	

(7.4)

aus Messwerten
aus Berechnung

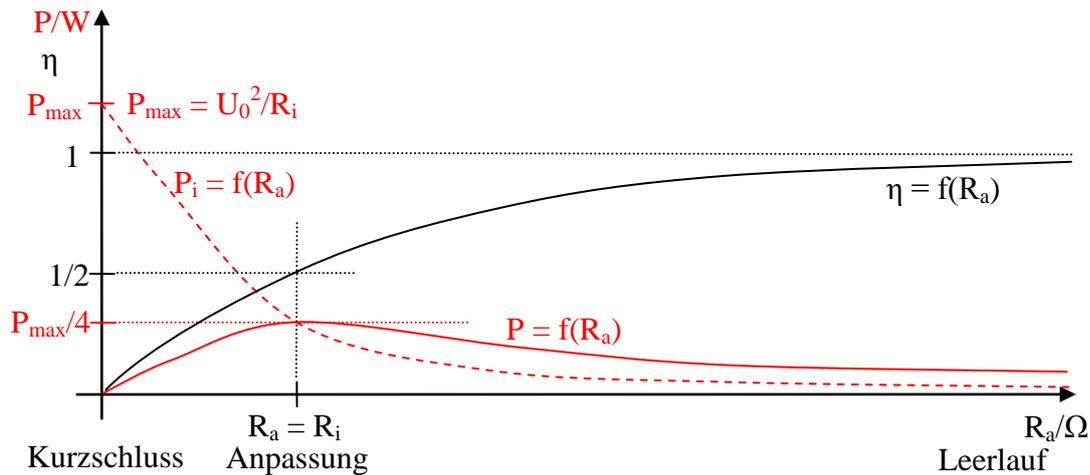


Abb. 7.8: Aktiver Zweipol in Abhängigkeit vom Lastwiderstand (Diagramme P , η)

Die Darstellungen in Abb. 7.8 ermöglichen folgende grundlegende Feststellungen:

- Bei **Kurzschluss** erfolgt der größte Leistungsumsatz (aber ausschließlich als Verlust), an der Last ist die Leistung „Null“ und der Wirkungsgrad wird $\eta = 0$.
- Bei **Anpassung** sind die Verlustleistung und die Leistung an der Last gleich groß (je $P_{\max}/4$), an R_a ergibt sich für die Last die maximal mögliche Leistung und der Wirkungsgrad wird $\eta = 50\%$.
- In der **Nähe des Leerlaufs** strebt die Verlustleistung stärker gegen Null als die Leistung an der Last und der Wirkungsgrad geht gegen $\eta = 100\%$ ⁴⁹.

(Bei einer Stromquelle wären die Aussagen zum Kurzschluss und Leerlauf auszutauschen.)

Zur Darstellung der Kurven in Abb. 7.8 sollten zum besseren messtechnischen Erkennen des Maximums der Leistung (bei Anpassung) rechts und links ein bis zwei weitere Messpunkte (U und I) ermittelt werden.

Diese Verhältnisse müssen nun für verschiedene Anwendungsfälle ausgewertet und interpretiert werden.

7.1.2 Interpretation der Kenngrößen für verschiedene Anwendungen

Die drei dargestellten besonderen Fälle entsprechen drei ausgewählten Betriebszuständen, deren Bewertung je nach Anwendung von „Hauptanwendung“ bis zu „Havariefall“ variiert.

Anwendung	Informationstechnik	Mess- u. Sensortechnik	Energietechnik
Kurzschluss $I = I_k = I_{\max}$, $U = 0$, $P_a = 0$, $P_i = P_{\max}$ bzw. $P_i = 0$	<ul style="list-style-type: none"> • Schaltungsausgang kann einer Stromquelle entsprechen. • Kurzschlussfestigkeit von Ein- bzw. Ausgängen sichern. 	<ul style="list-style-type: none"> • Messwandler entspricht einer Stromquelle, die in der Nähe des Kurzschlusses den größten Ausgangsstrom hat. (Z.B. Fotoelement) 	<ul style="list-style-type: none"> • Havariefall • Muss durch Sicherheitsmaßnahmen verhindert werden.

⁴⁹ In der Nähe des Leerlaufs ist die Leistung noch nicht Null, sondern erst bei $R_a = \infty$.

<p>Anpassung</p> <p>$I=I_k/2,$ $U=U_L/2,$ $P_a= P_{max}/4,$ $P_i= P_{max} /4$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Hauptanwendung der Informationstechnik • Bei der Signalübertragung, Signalverstärkung usw. liegt die höchste Signalleistung und somit das beste Signal-Rausch-Verhältnis bzw. der beste Störabstand vor. • (Rauschen und andere Störsignale wirken immer als Leistung.) 	<ul style="list-style-type: none"> • Messwandler entspricht einem Leistungswandler, der bei Anpassung die größte Ausgangsleistung abgibt. (Z.B. Messempfänger) 	<ul style="list-style-type: none"> • Ist unbrauchbar, weil $\eta = 50 \%$ völlig unakzeptabel ist. • (Leistung bei Anpassung liegt im Normalfall weit über der Nennleistung und über der in der Konstruktion realisierten maximalen Belastbarkeit.)
<p>Leerlauf</p> <p>In der Nähe des Leerlaufs: $I \approx 0,$ $U=U_L,$ $P_a \geq 0,$ $P_i \approx 0,$ bzw. $P_i \approx P_{max}$ (für Stromquelle)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Schaltungsausgang kann einer Spannungsquelle entsprechen. • Anwendung zur rückwirkungsfreien Kopplung zwischen Baustufen. • Leerlaufkennwerte von Schaltungen (z.B. Leerlaufverstärkung). 	<ul style="list-style-type: none"> • Messwandler entspricht einer Spannungsquelle, die in der Nähe des Leerlaufes die größte Ausgangsspannung hat. (Z.B. Tachogenerator, Thermoelement) 	<ul style="list-style-type: none"> • Hauptanwendung der Energietechnik. • Der Wirkungsgrad in der Nähe des Leerlaufs erreicht die notwendigen hohen Werte. • Leerlauffestigkeit von Ein- bzw. Ausgängen sichern.

Folgende Begriffe sind in diesem Zusammenhang zu verdeutlichen:

- **Kurzschlussfestigkeit** Bei Kurzschluss tritt **keine Zerstörung** (durch zu große Ströme) ein. Dazu sind oft besondere Schaltungsmaßnahmen notwendig.
- **Größter Ausgangsstrom** Größter **erreichbarer** Ausgangsstrom
- **Maximaler Ausgangsstrom** Maximal **zulässiger** Ausgangsstrom
- **Havariefall** Ein Kurzschluss kann den Ausfall eines Gerätes, die **Zerstörung** einer Anlage bis zu einem Kraftwerksunfall auslösen.
- **Rauschen und Störsignale** Werden als stochastische Signale durch Zufallsfunktionen beschrieben. Die **mittlere Leistung hat einen definierten Wert**. Das häufigste und leider immer vorhandene Störsignal ist Rauschen.
- **Signal-Rausch-Verhältnis** **Signalleistung / Rauschleistung**
- **Störabstand** Angabe in **Dezibel** für Signalleistung / Rauschleistung bzw. Signalleistung / Störleistung
- **Größte Ausgangsleistung** Größte **erreichbare** Leistung
- **Nennleistung** Leistung für den Nennbetrieb **entsprechend der konstruktiven Auslegung**
- **Maximale Belastbarkeit** Maximal **zulässige** Leistung

- **Rückwirkungsfreie Kopplung** Der Anschluss an den Ausgang ist belastungslos und hat somit **keinen Einfluss** (Rückwirkung) auf das Betriebsverhalten.
- **Leerlaufkennwerte** Kennwerte bei ausgangsseitigem Leerlauf stellen in der Regel Idealwerte dar (z.B. Leerlaufverstärkung).
- **Leerlauffestigkeit** Bei Leerlauf ($I < I_{\min}$) tritt **keine Zerstörung** (durch zu hohe Spannungen z.B. bei leistungselektronischen Stromwandlern und Schaltnetzteilen) ein, auch dazu sind bei einigen Schaltungen besondere Maßnahmen notwendig.
- **Größte Ausgangsspannung** Größte **erreichbare** Ausgangsspannung
- **Maximale Ausgangsspannung** Maximal **zulässige** Ausgangsspannung
- **Wirkungsgrad** Da die Leistungen ohnehin gering sind, **spielt** der Wirkungsgrad **in der Informationstechnik keine Rolle**. Hier geht es nur um die Qualität der Signalverarbeitung. (**Ausnahme**: Endverstärker mit hohen Ausgangsleistungen sind nur mit gutem Wirkungsgrad akzeptabel.)
In der Energietechnik die entscheidende Kenngröße.

Durch die sehr unterschiedliche Bewertung der Betriebszustände insbesondere aus der Sicht der Informationstechnik (und Elektronik) und der Energietechnik (und Leistungselektronik) kann keine einheitliche Betrachtung erfolgen und gibt es keine einheitliche Denkweise. Das trug mit zur Spezialisierung und zu verschiedenen Fachrichtungen in der Elektrotechnik bei.

7.1.3 Messungen am Grundstromkreis

Messung 7.1

Es soll im Messlabor die Kennlinie eines aktiven Zweipols ermittelt werden.

Versuchsaufbau:

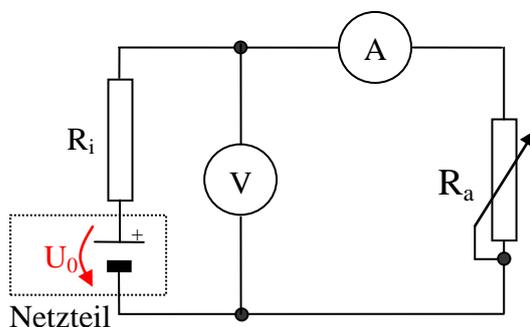


Abb. 7.9: Schaltung des Versuchsaufbaus

(Hinweise: Der aktive Zweipol wird durch ein geregeltes Netzteil, dessen R_i durch die Regelung null ist, und einen außen hinzugefügten „Innenwiderstand“ simuliert. Betrachten Sie den Widerstand des Amperemeters als Bestandteil von R_a . Es ist zu berücksichtigen, dass aber nur R_a selbst zu Null geregelt werden kann.)

Versuchsdurchführung:

Für das Netzteil wird die vorgesehene Spannung als U_0 eingestellt. (Die Strombegrenzung so wählen, dass sie während des Versuches nicht einsetzt.) Den vorgegebenen Innenwiderstand außen anschließen.

Folgende Messungen und Aufgaben sind durchzuführen:

1. Messen von Klemmenspannung und -strom bei $U_0 = 10 \text{ V}$ und $R_i = 50 \Omega$.
2. Grafische Darstellung der Kennlinie $U = f(I)$ aus den Messwerten.
3. Grafische Darstellung von U , I , U_i , P_a , P_i und η als Funktion des Außenwiderstandes durch Berechnung aus den Messwerten.
4. Vergleich der beiden Darstellungen mit aus Bauelementeparametern berechneten Kurven.
5. Erläutern Sie, welche Messpunkte der Kennlinie in diesem Versuch direkt ermittelt werden können und welche Genauigkeit dabei erreicht wird. Welche Fehlereinflüsse sind relevant?

Zusatzuntersuchung: Vergleich mit Kennlinien bei kleinerem U_0 und bei größerem R_i .

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist deutlich, dass die Kennlinie $U = f(I)$ eine Gerade ist.
2. Die Ergebnisse bestätigen die in Abschnitt 7.1.1 gezeigten Zusammenhänge.

Messung 7.2

Es sollen im Messlabor die Kennlinien verschiedener realer aktiver und passiver Zweipole ermittelt werden.

Versuchsaufbau:

Entwerfen Sie die jeweilige Messschaltung
(Hinweis: Erkunden Sie vor Messbeginn notwendige und einschränkende Parameter.)

Versuchsdurchführung:

Als Testquelle kann das Netzteil genutzt werden. (Die Strombegrenzung ist so zu wählen, dass eine Schutzfunktion für Bauelemente und Messgeräte entsteht.) Als Testlast werden veränderbare Ohm'sche Widerstände genutzt.

Folgende Messungen und Aufgaben sind durchzuführen:

1. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie $U = f(I)$ und $P = f(I)$ eines Audioverstärkers (ca. 5 bis 7 Messpunkte gleichmäßig bis zum Nennstrom verteilen)
(Hinweise: Der Nennstrom errechnet sich aus dem minimalen Lautsprecherwiderstand bei Nennausgangsleistung laut „Technischen Daten“. Für das Testeingangssignal wird ein Funktionsgenerator mit ca. 300 Hz genutzt. Die Größe des Testeingangssignals ist entsprechend dem Bereich der Eingangsspannung laut „Technischer Daten“ zu wählen. Die Eingangsspannung sowie die Stellung des Lautstärkereglers müssen für die Kennlinie konstant gehalten werden.)

Zusatzuntersuchung: Vergleich der Kennlinie mit der einer geringeren Eingangssignalaussteuerung

2. Messung und grafische Darstellung der Kennlinien $U = f(I)$ und $P = f(I)$ eines Solarpanels (ca. 7 Messpunkte von Kurzschluss bis Leerlauf, davon drei nahe am Maximum-Power-Point MPP)

(Hinweise: Das Feststellen des MPP ist während der Messung durch sofortige Leistungsberechnung erreichbar. Die Beleuchtung ist während der Messung konstant zu halten.)

Zusatzuntersuchung: Vergleich der Kennlinie mit der einer geringeren Beleuchtung

3. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie $U = f(I)$ einer 6-V-Glühlampe (ca. 5 bis 7 Messpunkte bis zur Nennspannung gleichmäßig verteilen)

(Hinweise: Die Temperaturveränderung abwarten; sie tritt sehr schnell ein. Nicht unnötig hoch- und herunterregeln.)

4. Messung und grafische Darstellung der Kennlinie $U = f(I)$ einer Halbleiterdiode mit der Nennbelastung $I_{\text{nenn}} = 3\text{ A}$ (nur Durchlassbereich, ca. 5 bis 7 Messpunkte bis zum Nennstrom gleichmäßig verteilen)

Zusammenfassung der Versuchsergebnisse:

1. Es ist offensichtlich, dass diese Kennlinien z.T. große Nichtlinearitäten aufweisen.
2. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass Kennlinien das Betriebsverhalten günstig darstellen und somit ein wichtiges Hilfsmittel zum optimalen Einsatz sind.

7.1.4 Übungsaufgaben zu Anwendungen des Grundstromkreises

Aufgabe 7.1.1

Eine Starterbatterie (Bleiakku) hat eine Leerlaufspannung von 12 V. Während des Startvorgangs fließen 160 A und die Klemmenspannung fällt auf 11 V ab (Zahlen leicht gerundet).

Frage 1: Wie groß ist der Innenwiderstand der Ersatzschaltung für diese Quelle?

Frage 2: Wie sieht die vollständige Kennlinie aus (grafische Darstellung)?

Frage 3: Welcher Bereich der Kennlinie ist praktisch nutzbar, wenn 200 A nicht überschritten werden dürfen?

Frage 4: Wo liegt dieser Bereich in der Darstellung für P und P_i als $f(R_a)$ in Bezug auf P_{max} ?

Aufgabe 7.1.2

An den Klemmen einer Blockbatterie werden $U_1 = 7,5\text{ V}$ und $I_1 = 0,3\text{ A}$ bei Belastung mit R_1 gemessen. Bei Belastung mit R_2 werden $U_2 = 8,5\text{ V}$ und $I_2 = 0,1\text{ A}$ gemessen.

Frage 1: Wie groß sind die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Ersatzschaltung der Blockbatterie?

Frage 2: Warum reichen die zwei Messpunkte, um Frage 1 zu beantworten?

Aufgabe 7.1.3

An einem Audioverstärker kann mit Lautsprechern von 4Ω eine Nennleistung von 80 W pro Kanal erreicht werden. Bei Betrieb mit Lautsprechern von 8Ω können nur 50 W entnommen werden.

Frage 1: Wie groß ist der Innenwiderstand eines Ausgangs des Audioverstärkers, wenn dieser im betrachteten Bereich konstant ist?

Frage 2: Wie groß wäre die Ausgangsleistung bei 8Ω , wenn die Ausgangsspannung von 4Ω auch bei 8Ω noch vorhanden wäre (wie in unmittelbarer Leerlaufnähe)?

Aufgabe 7.1.4

Ein Netzgerät ist auf die Spannung $U_0 = 10 \text{ V}$ und die Strombegrenzung $I_{\max} = 0,5 \text{ A}$ eingestellt. Die Regelung bewirkt, dass für $I < I_{\max}$ die Klemmenspannung konstant gehalten wird. Danach erfolgt eine Umschaltung der Regelung, es wird $I = I_{\max}$ konstant gehalten und die Spannung nimmt bei einer weiteren Verkleinerung des Belastungswiderstandes ab.

Frage: Wie sieht die Kennlinie aus (grafische Darstellung)?

Aufgabe 7.1.5

An einem Solarpanel wurden die folgenden Messpunkte ermittelt.

U/V	21,7	20,5	19	17,5	10	5	0
I/A	0	0,5	1,5	3,0	3,2	3,3	3,4

Frage 1: Wie sieht die Kennlinie $U = f(I)$ aus (grafische Darstellung)?

Frage 2: Wie sieht die Kennlinie $P = f(I)$ aus (in die grafische Darstellung einfügen)?

Frage 3: Wo liegt der Maximum-Power-Point (MPP) und welche Bedeutung ist aus der Kennlinie für ihn abzulesen?

7.2 Netzwerke – verzweigte und vermaschte Schaltungen

7.2.1 Analyse verzweigter und vermaschter Schaltungen

Verzweigte und vermaschte Schaltungen besitzen **mehrere Knotenpunkte** (Verzweigungen) **und** somit **mehrere Maschen** (geschlossene Stromkreise).

Zur Berechnung dieser Schaltungen (oder auch Netzwerke) ist es für die Auswahl der günstigsten Methode sinnvoll, folgende Aspekte zu betrachten:

1. Besitzt das Netzwerk eine oder mehrere Quellen?
2. Erfordert die Lösung der Aufgabe die Berechnung von Strom und/oder Spannung an einem oder mehreren bzw. allen Elementen der Schaltung?

Aus den Kapiteln 3 bis 5 stehen folgende Gesetze und Gleichungen für diese Berechnungen zur Verfügung:

1. Gesetze, die **ohne Einschränkungen** gelten, sind
 - die Kirchhoff'schen Sätze - Maschensatz und Knotenpunktsatz sowie
 - die Strom-Spannungs-Beziehung an den Bauelementen R, C und L (gegebenenfalls einschließlich ihrer Nichtlinearitäten).
2. Gesetze, die **nur für lineare Bauelemente** gelten bzw. abgeleitet wurden, sind
 - die Stromteilerregel,
 - die Spannungsteilerregel und
 - die Gleichungen zur Reihen- und Parallelschaltung von Elementen.

Darüber hinaus können weitere Denkweisen zusätzliche Möglichkeiten erschließen, z.B.

- das Überlagerungsprinzip (siehe Abschnitt 7.3),
- die Zusammenfassung zu Ersatzschaltungen (siehe Abschnitt 7.4),
- die Einführung von Maschenströmen bzw. Knotenspannungen (siehe Abschnitt 7.6) oder
- die Rechnersimulation (siehe Abschnitt 7.5).

Im Netzwerk bedeuten

- Zweige: Schaltungsteil von einem Knoten zu dem nächsten
- Maschen: Ein beliebiger einfacher geschlossener Umlauf über verschiedene Zweige

Sind mehrere Quellen vorhanden und sollen alle Ströme und Spannungen ermittelt werden, bietet sich eine **Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen** an. Die Vorgehensweise soll an einem Beispiel dargestellt werden.

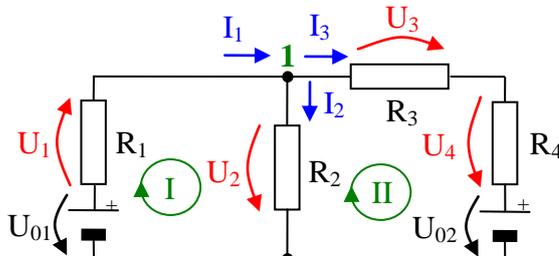


Abb. 7.10: Beispiel für ein Netzwerk

In Abb. 7.10 könnte vereinfacht der Vorgang bei der Starthilfe für einen PKW dargestellt sein. Dann wären R_2 der Widerstand des Anlassers, R_3 der Widerstand des Starthilfekabels sowie rechts und links die beiden PKW-Akkus.

Gegeben (bekannt) sind die Schaltung und ihre Bauelemente mit ihren Parameter (in Abb. 7.10 schwarz dargestellt).

1. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen gewählt und bezeichnet werden⁵⁰. (In Abb. 7.10 mit blauen und roten Zeichen geschehen.)
Achtung: An einem Bauelement kann nur entweder der Strom oder die Spannung gewählt werden; der jeweils andere ist danach durch die Zählpfeilregeln festgelegt!
Vorschlag: In Jedem Zweig den Strom wählen und danach alle Spannungen in diesem Zweig nach den Zählpfeilregeln hinzufügen.
2. **Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Knoten bestimmt werden. Diese ergeben sich aus der Anzahl der wirklichen Knoten minus Eins. Wirkliche Knoten sind solche, von denen nur Zweige mit wenigstens einem Element ausgehen. (Aus Gründen der Zeichnung angeordnete Knoten, die mit einem Kurzschluss direkt verbunden sind, zusammenfassen!) In Abb. 7.10 sind zwei Knoten, folglich ein unabhängiger Knoten.
3. **Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Maschen bestimmt werden. Erfolgt am einfachsten aus der Anzahl der Zweige (zwischen wirklichen Knoten) minus der Anzahl der unabhängigen Knoten. In Abb. 7.10 gibt es drei Zweige minus ein unabhängiger Knoten gleich zwei unabhängige Maschen⁵¹.
4. **Schritt der Berechnung:** Es müssen die unabhängigen Knoten und Maschen gewählt, bezeichnet und die Gleichungen aufgestellt werden. In Abb. 7.10 wurden der gewählte Knoten durch eine „1“ und die gewählten Maschen mit I und II sowie Umlaufrichtung grün gekennzeichnet. Es hätte genauso gut der andere Knoten gewählt werden können, dann fließen alle Ströme in die entgegengesetzte Richtung (ergibt dieselbe Gleichung, deshalb nur ein unabhängiger Knoten). Genauso gut könnte die große Masche anstelle einer der anderen gewählt werden. Richtlinie ist lediglich, dass die Gleichungen so wenig Terme wie möglich beinhalten sollten.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad I_1 = I_2 + I_3 \\ \text{I} \quad 0 = U_1 + U_2 - U_{01} \\ \text{II} \quad 0 = U_3 + U_4 + U_{02} - U_2 \end{array} \quad (7.5)$$

Durch Einsetzen der Ströme entsprechend der jeweiligen Strom-Spannungs-Beziehung und Ordnen nach den unbekanntem Strömen folgt ein lineares eindeutig lösbares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten (bei linearen Bauelementen)⁵².

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 0 = I_1 - I_2 - I_3 \\ \text{I} \quad U_{01} = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ \text{II} \quad U_{02} = R_2 I_2 - (R_3 + R_4) I_3 \end{array} \quad (7.6)$$

5. **Schritt der Berechnung:** Lösen des Gleichungssystems mit aus der Mathematik bekannten Verfahren. In diesem Beispiel soll die Kramer'sche Regel angewendet werden, weil sie einen eindeutigen Algorithmus besitzt. Dazu wird (7.6) in Matrizendarstellung umgeformt.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ U_{01} \\ U_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

⁵⁰ Die Namensgebung kann beliebig erfolgen, muss aber eindeutig sein.

⁵¹ Tiefergehende Darlegungen sind der Literatur, z.B. [16], zu entnehmen.

⁵² Beachte, dass bei der erfolgten Namensgebung $U_4 = R_4 I_3$ ist.

Dabei stehen links der Spaltenvektor der bekannten Werte und rechts die Koeffizientenmatrix multipliziert mit dem Spaltenvektor aus den unbekanntem Werten. Aus der Koeffizientenmatrix kann die Koeffizientendeterminante geschrieben und ausgerechnet werden.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -(R_3 + R_4) \end{vmatrix} = -R_2(R_3 + R_4) + 0 - R_1R_2 - 0 - 0 - R_1(R_3 + R_4)$$

Dafür werden die Elemente der drei roten Diagonalen multipliziert und addiert, anschließend die der drei blauen Diagonalen multipliziert und subtrahiert⁵³. Wird in der Koeffizientendeterminante die n-te Spalte durch die bekannten Werte ersetzt, folgt die Determinante D_n.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U_{01} & 0 \\ 0 & U_{02} & -(R_3 + R_4) \end{vmatrix} = -U_{01}(R_3 + R_4) + 0 - U_{02}R_1 - 0 - 0 - 0$$

(Hier sei D₂ als Beispiel dargestellt.) Die Unbekannten ergeben sich aus

$$I_n = \frac{D_n}{D}, \tag{7.8}$$

und I₂ wird im vorliegenden Beispiel

$$I_2 = \frac{-U_{01}(R_3 + R_4) - U_{02}R_1}{-R_2(R_3 + R_4) - R_1R_2 - R_1(R_3 + R_4)} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1R_2}. \tag{7.9}$$

Die anderen Ströme werden auf analoge Weise berechnet.

War der Strom am Anfang in die falsche Richtung gewählt worden, ergibt sich ein negativer Zahlenwert, was exakt dem richtigen Ergebnis entspricht. Auf keinen Fall sollte während der Rechnung die Wahl geändert werden, das führt fast sicher zu Fehlern.

Die Spannungen können anschließend einfach durch die jeweilige Strom-Spannungs-Beziehung bestimmt werden.

Bei Gleichungssystemen mit mehr als drei Unbekannten wird der Aufwand deutlich höher, so müssen die Determinanten über Unterdeterminanten entwickelt werden oder Ähnliches bei anderen Verfahren erfolgen.

Im Falle von nichtlinearen Koeffizienten ist im Allgemeinen nur eine Lösung mit Rechnersimulation (siehe Abschnitt 7.5) Erfolg versprechend.

Bei zeitabhängigen Größen ergibt sich ein Differentialgleichungssystem, was dementsprechend gelöst werden muss (siehe AEP III).

Ist nur eine Quelle vorhanden und nur ein interessierender Strom bzw. eine Spannung zu ermitteln, bietet sich eine **Berechnung mit den Teilerregeln, den Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie den Strom-Spannungs-Beziehungen** an. Dazu müssen diese eventuell mehrfach angewendet werden. Ein Beispiel soll das Vorgehen verdeutlichen.

In Abb. 7.11 könnte vereinfacht an einen Audioverstärker (U₀ und R_i)⁵⁴ ein Lautsprecher (R_{L1}) direkt und ein zweiter (R_{L2}) über ein längeres Kabel (R_K) angeschlossen sein. Gegeben (bekannt) sind die Schaltung und ihre Bauelemente mit ihren Parametern (in Abb. 7.11 schwarz dargestellt). Gesucht wird die Spannung an R_{L2}. Dazu bietet sich die Spannungsteilerregel an.

⁵³ Beachte, dass die Produkte sowohl Nullen als auch negative Koeffizienten enthalten.

⁵⁴ Da die Frequenz im Beispiel unwichtig ist, reicht eine Gleichstromuntersuchung.

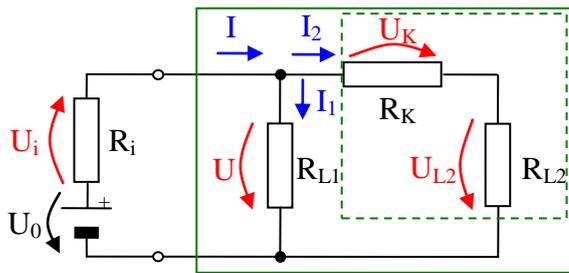


Abb. 7.11: Beispiel für ein Netzwerk mit einer Quelle

1. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden⁵⁵. Da nur eine Quelle vorhanden ist, wird am sinnvollsten physikalisch richtig bezeichnet. (In Abb. 7.11 mit blauen und roten Zeichen geschehen.)
2. **Schritt der Berechnung:** Es wird entweder ausgehend vom gesuchten Element oder von der Quelle eine reine Reihenschaltung ermittelt. (In Abb. 7.11 ist ausgehend vom gesuchten Element die reine Reihenschaltung mit einem grün gestrichelten Kasten versehen worden.) Dafür gilt:

$$\frac{U_{L2}}{U} = \frac{R_{L2}}{R_{L2} + R_K}.$$

Achtung: Nur die Elemente der reinen Reihenschaltung teilen die an ihnen anliegende Spannung auf.

3. **Schritt der Berechnung:** Es kann, da die Aufteilung zwischen R_K und R_{L2} geklärt ist, der mit einem grünen Kasten umrandete Schaltungsteil zu einem Widerstand zusammengefasst und noch einmal die Spannungsteilung angewandt werden.

$$\frac{1}{R_{L1KL2}} = \frac{1}{R_{L1}} + \frac{1}{R_K + R_{L2}} \quad R_{L1KL2} = \frac{R_{L1}(R_K + R_{L2})}{R_{L1} + R_K + R_{L2}}$$

Nun liegt wieder eine reine Reihenschaltung von R_i und R_{L1KL2} vor und es wird

$$\frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1KL2}}{R_i + R_{L1KL2}} \quad \text{und}$$

$$\frac{U_{L2}}{U_0} = \frac{U_{L2}}{U} \cdot \frac{U}{U_0} = \frac{R_{L1}R_{L2}}{R_iR_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}.$$

(7.10)

Die Berechnung kann auch mit der Stromteilerregel erfolgen.

1. **Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden (wie oben).
2. **Schritt der Berechnung:** Es wird der grün gestrichelte Schaltungsteil zusammengefasst ($R_{KL2}=R_K+R_{L2}$), er stellt dann eine reine Parallelschaltung mit R_{L1} dar.

$$\frac{I_2}{I} = \frac{R_{L1KL2}}{R_{KL2}} = \frac{R_{L1} \parallel R_{KL2}}{R_{KL2}}$$

3. **Schritt der Berechnung:** Aus der Sicht der Quelle wird R_{ges} und damit dann I berechnet.

$$R_{ges} = R_i + R_{L1} \parallel R_{KL2} \quad \text{und}$$

$$I = \frac{U_0}{R_{ges}} = \frac{U_0(R_{L1} + R_K + R_{L2})}{R_iR_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an R_{L2} wird U_{L2} bestimmt.

⁵⁵ Die Namensgebung kann wiederum beliebig erfolgen, muss aber eindeutig sein.

$$U_{L2} = I_2 R_{L2} = I \frac{I_2}{I} R_{L2} = \frac{U_0 R_{L1} R_{L2}}{R_i R_{L1} + (R_i + R_{L1})(R_K + R_{L2})}$$

Das Ergebnis stimmt mit (7.10) überein. Ist R_i vernachlässigbar klein, wird

$$U_{L2} = \frac{U_0 R_{L2}}{R_K + R_{L2}} \quad , \text{ dagegen } \quad U_{L1} = U_0 .$$

Daraus ist zu erkennen, dass der Kabelwiderstand möglichst klein gegenüber dem Lautsprecherwiderstand sein muss, damit Lautsprecher zwei gleich „laut“ sein kann. (Lautsprecherwiderstände bewegen sich heute zwischen 2 und 4 Ω , somit müssen für Lautsprecher sehr gute Kabel benutzt werden.)

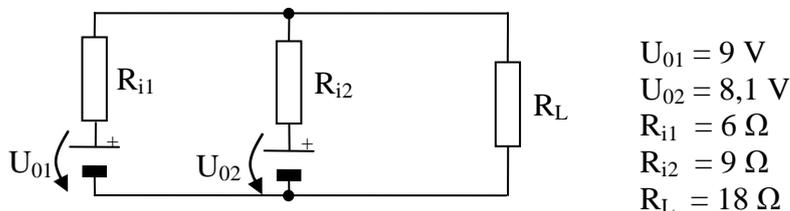
Diese Art der Berechnung erfordert mehr elektrotechnisches Verständnis, dagegen etwas weniger mathematische Kenntnisse und Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme. Die Rechnung müsste, wenn mehrere Ströme und Spannungen gesucht werden, dafür jedes Mal fast komplett wiederholt werden.

(Ersatzweise kann auch **vielfach hintereinander die Strom-Spannungs-Beziehung** auf Widerstände und zusammengefasste Widerstände verwendet werden, um abwechselnd einen Strom oder eine Spannung zu bestimmen, bis man am Ziel ist.)

7.2.2 Übungsaufgaben zur Schaltungsberechnung

Aufgabe 7.2.1

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind U_{01} , U_{02} sowie R_{i1} , R_{i2} nicht gleich.



$$\begin{aligned} U_{01} &= 9 \text{ V} \\ U_{02} &= 8,1 \text{ V} \\ R_{i1} &= 6 \Omega \\ R_{i2} &= 9 \Omega \\ R_L &= 18 \Omega \end{aligned}$$

Abb. 7.12: Schaltung für Aufgabe 7.2.1

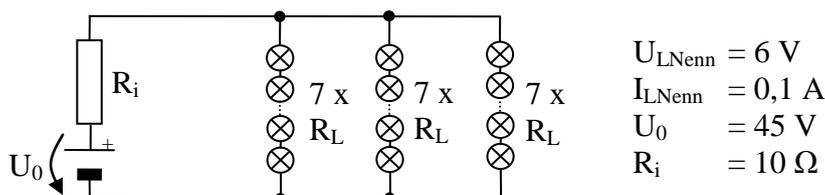
Frage 1: Wie groß ist der Strom durch R_L ; welchen Anteil liefern beide Quellen?

Frage 2: Welche Ströme liefern die Batterien, wenn beide 9 V und $R_i = 6 \Omega$ hätten?

(Hinweis: Berechnen Sie mit den Kirchhoff'schen Sätzen alle drei Ströme.)

Aufgabe 7.2.2

Eine Außenlichterkette besteht aus drei parallel geschalteten Reihen von je sieben Lampen und ist an eine Quelle angeschlossen.



$$\begin{aligned} U_{L\text{Nenn}} &= 6 \text{ V} \\ I_{L\text{Nenn}} &= 0,1 \text{ A} \\ U_0 &= 45 \text{ V} \\ R_i &= 10 \Omega \end{aligned}$$

Abb. 7.13: Schaltung der Lichterkette

Frage 1: Wie groß ist R_L ; welcher Strom fließt durch jede Lampe im Normalfall?

Frage 2: Wie ändert sich der Strom, wenn in einer Reihe zwei Lampen ausfallen (bei guten Ketten erlangen die Lampen dabei einen Kurzschluss, die restlichen Lampen leuchten weiter und zeigen so die ausgefallenen an.)

(Hinweis: Benutzen Sie die Stromteilerregel.)

Aufgabe 7.2.3

Bei Schaltungen, in denen Brückenzweige enthalten sind, gibt es keine reinen Reihen- oder Parallelschaltungen. Diese Schaltungen wären nur mit den Kirchhoff'schen Sätzen berechenbar. Abhilfe schafft die Stern-Dreieck-Umformung⁵⁶.

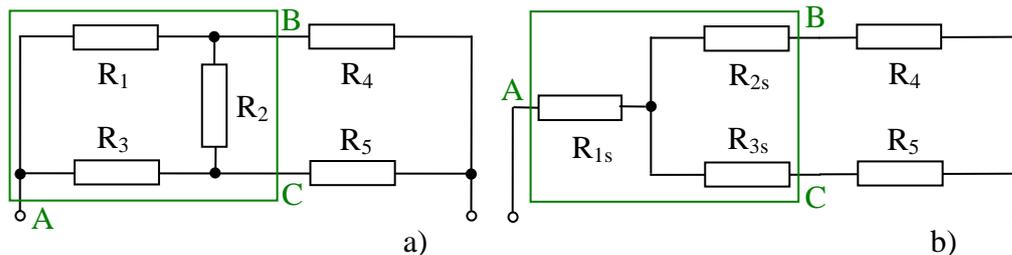


Abb. 7.14: a) Brückenschaltung als Dreieckschaltung; b) Sternschaltung

In Abb. 7.14 a) können keine reinen Reihen- und Parallelschaltungen angegeben werden, in b) sind diese nach Umformung in Sternschaltung deutlich sichtbar.

Frage: Wie lauten R_{1s} , R_{2s} und R_{3s} bei gegebenen R_1 , R_2 und R_3 ?

(Hinweis: Alle Ströme an den Klemmen A, B und C sowie alle Spannungen zwischen je zwei Klemmen müssen bei beiden Schaltungsvarianten stets gleich sein (nur dann sind die Schaltungen austauschbar). Durch Gleichsetzen der Widerstandswerte beider Varianten gesehen von A und B mit offenem C, von B und C mit offenem A sowie von C und A mit offenem B sind drei Gleichungen mit den drei unbekanntem R_{1s} , R_{2s} und R_{3s} zu gewinnen.)

Aufgabe 7.2.4

Zur Veränderung des Messbereiches eines Amperemeters wird ein Widerstand (Shunt) parallel geschaltet, damit nur ein definierter Teil des Gesamtstromes durch das Amperemeter fließt. Das Amperemeter hat einen Endausschlag von $50 \mu\text{A}$ und dabei einen Spannungsabfall von 100 mV .

Frage: Wie groß muss ein Shunt sein, wenn der Endausschlag 1 A betragen soll?

Aufgabe 7.2.5

Zwei Motoren (Widerstände $R_{\text{Mot}1}$ und $R_{\text{Mot}2}$ von je 200Ω) steuern eine Kamerabewegung. Zum Schutz wird der Motorstrom mit einem Messwiderstand ($R_{\text{Mess}} = 20 \Omega$) gemessen, an den ein Messverstärker (Eingangswiderstand $R_{\text{Ein}} = 10 \text{ k}\Omega$) angeschlossen ist. Die Versorgung übernimmt eine Quelle mit $U_0 = 24 \text{ V}$ und $R_i = 0,1 \Omega$.

⁵⁶ Dreieck- und Sternschaltung sind zwei mögliche Anordnungen von Bauelementen zwischen drei Anschlüssen. Sie sind keineswegs an Drehstrom gebunden.

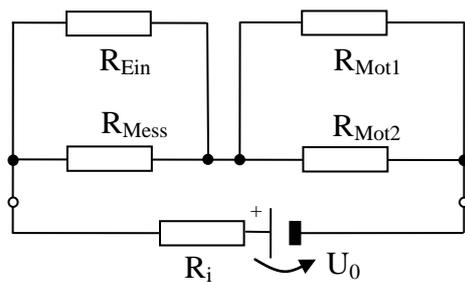


Abb. 7.15: Schaltung der Stromversorgung für die Kamerasteuerung (vereinfacht)

Frage: Wie groß ist der Gesamtwiderstand von U_0 aus gesehen und welchen Strom muss die Quelle liefern?

(Hinweis: Vernachlässigen Sie Widerstände mit geringerem Einfluss als 1% und begründen Sie dieses.)

Die Aufgaben verdeutlichen, dass eine Berechnung mit den Kirchhoff'schen Sätzen immer möglich ist, wenn mathematische Methoden zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems zur Verfügung stehen.

Unter Einbeziehung der Stern-Dreieck-Umformung können alle Schaltungen mit Hilfe der Teilerregeln, der Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie der Strom-Spannungs-Beziehungen, solange diese linear sind, berechnet werden. (Für Strom-Spannungs-Beziehungen mit Differentialen werden in AEP III entsprechende Methoden behandelt.)

7.3 Überlagerungsprinzip

7.3.1 Schaltungsanalyse mit Hilfe des Überlagerungssatzes

Dem Überlagerungssatz liegt die **Denkweise** zugrunde, die **Wirkungen** jeder Quelle **einzel**n zu berechnen und anschließend zur Gesamtwirkung zu **addieren**.

Das ist möglich, solange Bauelemente mit linearen Strom-Spannungs-Beziehungen vorliegen.

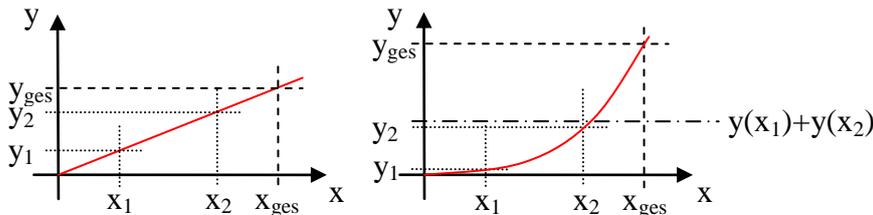


Abb. 7.16: Linearer und nichtlinearer Zusammenhang

Für einen linearen Zusammenhang gilt $y_{ges} = y(x_{ges}) = y(x_1+x_2) \equiv y(x_1) + y(x_2)$ für einen nichtlinearen Zusammenhang wird stets $y(x_1+x_2) \neq y(x_1) + y(x_2)$; vergleiche Abb. 7.16.

Die Vorgehensweise soll zum besseren Vergleich an dem gleichen Beispiel für I_2 dargestellt werden, wie in Abschnitt 7.2.1 Abb. 7.10 benutzt.

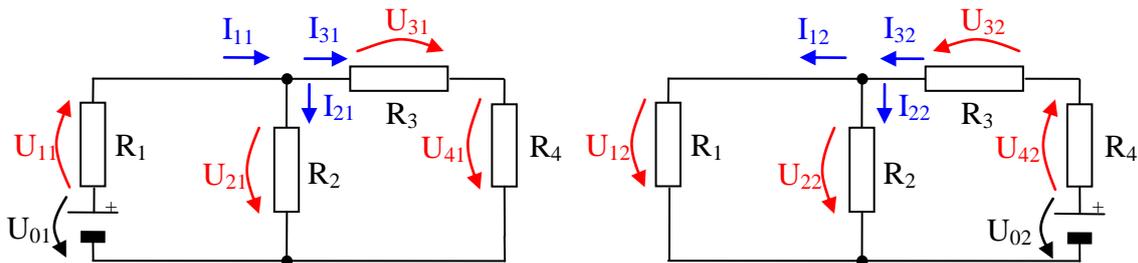


Abb. 7.17: Aufteilung in Schaltungen für jede Quelle

- Schritt der Berechnung:** Die Schaltung muss in Schaltungen für jede Quelle aufgeteilt werden. Dazu werden die jeweils anderen idealen **Spannungsquellen durch einen Kurzschluss** bzw. die jeweils anderen idealen **Stromquellen durch einen Leerlauf** ersetzt. (In Abb. 7.17 dargestellt.)
- Schritt der Berechnung:** Es müssen alle Ströme und Spannungen bezeichnet werden. Da jeweils nur eine Quelle vorhanden ist, wird am sinnvollsten physikalisch richtig bezeichnet. (In Abb. 7.17 mit blauen und roten Zeichen geschehen.)
- Schritt der Berechnung:** Mit den Teilerregeln, den Regeln zur Reihen- und Parallelschaltung sowie den Strom-Spannungs-Beziehungen wird für beide Schaltungen einzeln die jeweils gesuchte Größe berechnet (hier I_2). Dabei ist zu kennzeichnen, von welcher Quelle der Anteil stammt.

$$\frac{I_{21}}{I_{11}} = \frac{\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}{R_2} = \frac{R_3+R_4}{R_2+R_3+R_4} \quad I_{11} = \frac{U_{01}}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}}$$

$$\frac{I_{22}}{I_{32}} = \frac{R_1}{R_1+R_2} \quad I_{32} = \frac{U_{02}}{R_3+R_4 + \frac{R_2R_1}{R_1+R_2}}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Die berechneten Anteile von jeder Quelle müssen entsprechend ihrer Richtungen addiert werden. In unserem Beispiel haben I_{21} und I_{22} die gleiche Richtung, so dass auch I_2 in diese Richtung zeigt.

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + \frac{U_{02} R_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (7.11)$$

Das Ergebnis stimmt mit (7.9) überein. Auch an dieser Stelle ist zu sehen, dass diese Art der Berechnung mehr elektrotechnisches Verständnis, dagegen etwas weniger Übung beim Lösen der linearen Gleichungssysteme erfordert.

Darüber hinaus ermöglicht diese Denkweise eine genaue Zuordnung der Wirkungen zu den Ursachen und insbesondere bei Quellen mit verschiedenen Frequenzen (z.B. Gleichstrom zur Versorgung und NF-Signale) eine getrennte Betrachtung und Optimierung der Schaltung.

7.3.2 Übungsaufgaben zum Überlagerungssatz

Aufgabe 7.3.1

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind U_{01} , U_{02} sowie R_{i1} , R_{i2} nicht gleich.

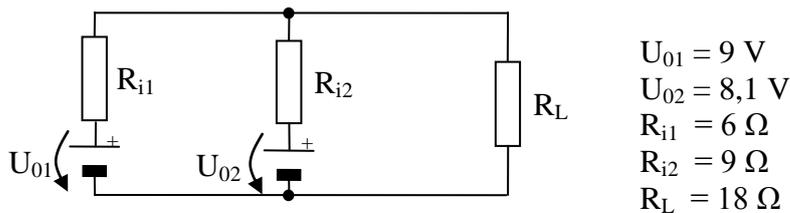


Abb. 7.18: Schaltung von Aufgabe 7.2.1

- Frage 1: Wie groß ist der Strom durch R_L ; welchen Anteil liefern beide Quellen?
 Frage 2: Welche Ströme liefern die Batterien, wenn beide 9 V und $R_i = 6 \text{ } \Omega$ hätten?
 (Hinweis: Berechnen Sie nach dem Überlagerungssatz beide Anteile.)

Aufgabe 7.3.2

Gegeben ist die Schaltung einer Transistorverstärkerstufe. Die Kondensatoren haben für die vorliegende Signalfrequenz einen Widerstand von ≈ 0 und für Gleichstrom von ∞ .

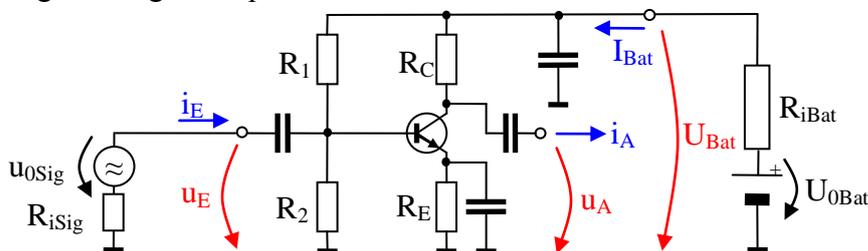


Abb. 7.19: Transistorverstärkerstufe mit Batteriespannung und Signalen

- Frage: Wie sehen jeweils die Schaltungen für die Gleichstromversorgung (Quelle U_{0Bat}) und die Signalverstärkung (Quelle U_{0Sig}) aus?
 (Hinweise: Kondensatoren mit einem Widerstand von ≈ 0 durch „Kurzschluss“ ersetzen. Kondensatoren mit einem Widerstand von ∞ führen zum Wegfall des Zweiges, in dem kein Strom fließen kann.)

7.4 Ersatzzweipole

7.4.1 Schaltungsanalyse mit Hilfe von Ersatzzweipolen

Der Nutzung von Ersatzschaltungen liegt die **Denkweise** zugrunde, **Schaltungsteile zusammenzufassen**, deren Details gerade nicht interessieren.

Die Zusammenfassung zu einer Schaltung mit zwei Klemmen ergibt im Allgemeinen einen aktiven Zweipol, der bei linearen Bauelementen dem einfachsten aktiven Zweipol entspricht. Die Vorgehensweise soll zum besseren Vergleich wiederum an dem gleichen Beispiel für I_2 dargestellt werden, wie in Abschnitt 7.2.1 Abb. 7.10 und Abschnitt 7.3.1 Abb. 7.17 benutzt.

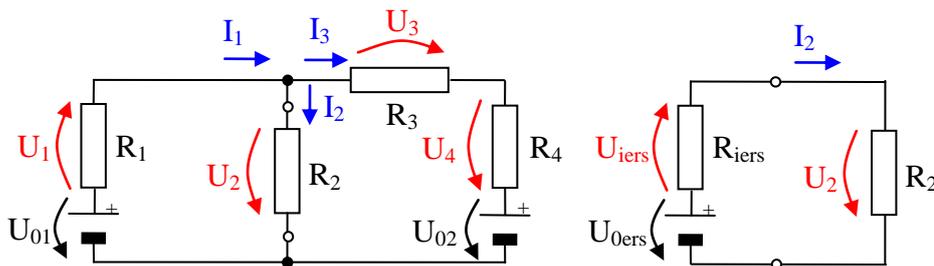


Abb. 7.20: Zusammenfassung zu einem Ersatzzweipol

1. **Schritt der Berechnung:** Die Schaltung, die zusammengefasst werden soll, muss gekennzeichnet werden (z.B. durch Klemmen wie in Abb. 7.20). Für den Ersatzzweipol sind die beiden Parameter R_{iers} und U_{0ers} beziehungsweise alternativ für einen davon I_{kers} zu bestimmen.
2. **Schritt der Berechnung:** Bestimmung der Ersatzspannungsquelle U_{0ers} aus der Leerlaufspannung an den Klemmen (d.h., R_2 wird ∞ gesetzt).

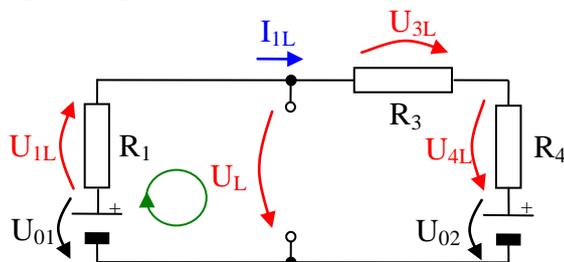


Abb. 7.21: Schaltung zur Bestimmung von U_L

Es fließt nur ein Strom in diesem Kreis. Dabei wird I_L durch U_{01} angetrieben und durch U_{02} gebremst.

$$I_L = \frac{U_{01} - U_{02}}{R_1 + R_3 + R_4}$$

Aus einem kleinen Maschensatz (grüner Umlauf) folgt U_L .

$$0 = U_{IL} + U_L - U_{01} \quad U_L = U_{01} - I_L R_1$$

$$U_L = U_{0ers} = U_{01} - \frac{(U_{01} - U_{02})R_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1 + R_3 + R_4}$$

3. **Schritt der Berechnung:** Bestimmung des Ersatzinnenwiderstandes R_{iers} durch Berechnung des Gesamtwiderstandes von den Klemmen aus gesehen. Dabei werden ideale Spannungsquellen durch einen Kurzschluss bzw. ideale Stromquellen durch einen Leerlauf ersetzt.

$$R_{\text{iers}} = R_1 \parallel (R_3 + R_4) = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}$$

4. **Schritt der Berechnung:** Bestimmung von I_2 in dem entstandenen Grundstromkreis.

$$I_2 = \frac{U_{\text{0ers}}}{R_{\text{iers}} + R_2} = \frac{U_{01}(R_3 + R_4) + U_{02}R_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (7.12)$$

Das Ergebnis stimmt natürlich wieder mit (7.9) und (7.11) überein. An dieser Stelle ist ebenfalls zu sehen, dass diese Art der Berechnung mehr elektrotechnisches Verständnis erfordert. Solches Vorgehen ist besonders nützlich, wenn der Ersatzzweipol mehrfach wieder verwendet werden kann.

7.4.2 Übungsaufgaben zu Ersatzzweipolen

Aufgabe 7.4.1

Zwei Blockbatterien wurden parallel geschaltet, um eine Last ausreichend zu versorgen. Durch unterschiedliche Ladezustände sind U_{01} , U_{02} sowie R_{i1} , R_{i2} nicht gleich.

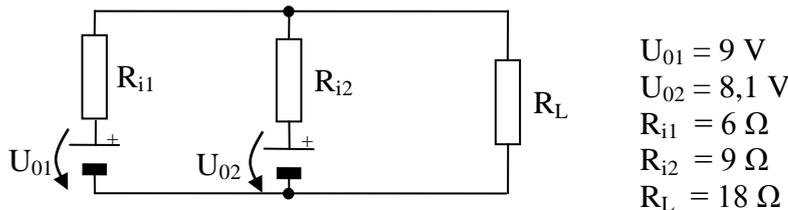


Abb. 7.22: Schaltung von Aufgabe 7.2.1

Frage 1: Wie groß ist der Strom durch R_L ?

Frage 2: Welcher Strom fließt, wenn beide Batterien 9 V und $R_i = 6 \Omega$ hätten?

(Hinweis: Berechnen Sie mit Hilfe eines Ersatzzweipols für beide Batterien.)

Aufgabe 7.4.2

Die Bestimmung von Ersatzzweipolen für den Ein- und Ausgang der Transistorverstärkerstufe in Bezug auf die Signalquelle (entspr. Aufgabe 7.3.2) zeigt Abb. 7.23. Die Ersatzquelle für den Eingang kann vernachlässigt werden. Am Ausgang erscheint für den Transistor eine gesteuerte Stromquelle mit $I_c = \beta i_E$ (β Stromverstärkungsfaktor, i_E Eingangsstrom). (Im Beispiel sind $R_{iEin} = R_1 \parallel R_2 \parallel r_{BE} = 10 \text{ k}\Omega$, $\beta = 200$ und $R_{iAus} = R_C \parallel r_{BE} = 5 \text{ k}\Omega$.)

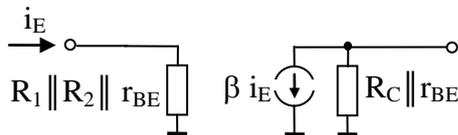


Abb. 7.23: Ersatzschaltungen für Ein- und Ausgang der Transistorverstärkerstufe

Frage 1: Wie groß sind die Eingangsspannung u_E , die Leerlaufausgangsspannung u_A und die Verstärkung $v_0 = u_A/u_E$ bei $i_E = 10 \mu\text{A}$?

Frage 2: Wie groß ist die Leerlaufausgangsspannung, wenn ein Widerstand von $10 \text{ k}\Omega$ den Ausgang belastet (z. B. eine zweite Verstärkerstufe)?

(Mehr dazu siehe AEP II)

7.5 Modellierung und Simulation

7.5.1 Grundlagen der Modellierung für Simulationsprogramme

Die Möglichkeiten der numerischen Lösung von Gleichungssystemen einschließlich von Differentialgleichungssystemen und nichtlinearen Bauelementen führte zur Entwicklung einer Vielzahl von Simulationsprogrammen. Diese Programme unterscheiden sich insbesondere durch die Art der Eingabe. Da auch das Aufstellen der formalen Gleichungssysteme von den Programmen mit übernommen wird, erfolgt die Eingabe in Form eines für das Programm verständlichen Modells.

Das **Modell** für ein Simulationsprogramm muss mit einer **formalen Sprache** erstellt werden. Dazu eignen sich elektrische **Schaltzeichnungen**, Block- oder **Funktionsdiagramme**, **Petrinetze** (jeweils mit genau festgelegten Zeichnungselementen) oder **Hardwarebeschreibungssprachen**.

Die Aufgabe besteht nun darin, ein widerspruchsfreies Modell mit den für das Programm verständlichen Sprachen zu formulieren, das der elektrischen Anlage so entspricht, als ob mit ihr experimentiert werden soll. Dafür gelten folgende Aspekte:

1. Das Modell muss stets physikalisch widerspruchsfrei sein.
2. Die Anlage sollte so stark wie möglich vereinfacht und auf die wesentlichen Funktionen beschränkt werden, indem alles, was irgendwie vertretbar ist, vernachlässigt oder zusammengefasst wird. (Solange Punkt 1. dabei nicht verletzt wird.) *Es müssen alle im Modell vorhandenen Parameter variiert werden, wodurch sehr schnell bei anderem Vorgehen eine unübersehbare Datenflut entsteht.*
3. An den Stellen der elektrischen Anlage, die genauer untersucht werden müssen, wird schrittweise das Modell verfeinert. Jede Veränderung (Ursache) muss der entstehenden Wirkung zugeordnet werden können.
4. Das Entscheidende ist die Simulationsstrategie. (Die Simulation entspricht einem „Experiment“ und alles, was nicht erprobt wird, bleibt unbekannt.) Die Strategie muss so geplant werden, dass ein vollständiger Überblick über das Verhalten der Anlage entsteht. Das Verhalten kann z.B. in Form von grafischen Darstellungen (analog zu Messkurven) beschrieben werden. Dagegen entstehen mathematische Zusammenhänge (analog zu Formeln) lediglich als Annäherung zu Messkurven.

Physikalisch widerspruchsfrei bedeutet z.B., dass Folgendes beachtet werden muss:

- Eine ideale Spannungsquelle, eine Kapazität und ein Schalter können nicht miteinander in irgendeiner Kombination parallel angeschlossen werden.
- Eine ideale Stromquelle, eine Induktivität und ein Schalter können nicht in irgendeiner Kombination zueinander in Reihe liegen.
- Eine Zeitkonstante $\tau = 0$ in rückgekoppelten Kreisen führt zu Stabilitätsproblemen bei der Berechnung.
- Es sollte die Funktion einer Schaltung nicht nur durch „zufällig“ nicht vernachlässigte parasitäre oder Verlustelemente (z.B. einen Innenwiderstand der Quelle) gegeben sein.

Schon diese wenigen Bemerkungen machen deutlich, dass auch die Simulation mit einem Rechner ein **sehr gutes elektrotechnisches Verständnis** und einige **Erfahrungen** voraussetzt. Nicht zuletzt müssen die Ergebnisse **auf Plausibilität überprüft** und zur Nutzung **interpretiert** werden können.

(Weitergehende Darlegungen sind den Anleitungen der Programme zu entnehmen.)

Die Vorgehensweise bei der Modellierung und Simulation sollte im Weiteren praktisch kennen gelernt werden.

7.5.2 Übungsaufgaben mit Rechnersimulation

Aufgabe 7.5.1

Ein Akku und ein Generator wurden parallel geschaltet, um eine Last ohne Unterbrechung zu versorgen. Durch die ungleiche Konstruktion sind U_{01} , U_{02} sowie $\omega_1 L_{i1}$, R_{i2} nicht gleich (etwas erweiterte Aufgabe 7.2.1).

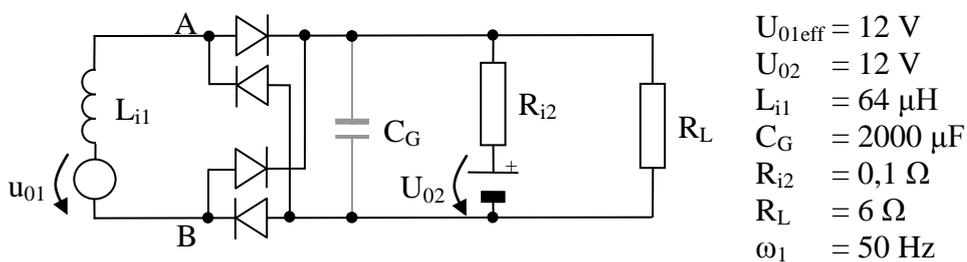


Abb. 7.24: Schaltung von Aufgabe 7.2.1

Frage 1: Wie sehen Strom und Spannung von R_L und bei den Punkten A B über der Zeit aus?

Frage 2: Welche Veränderung gibt es, wenn ein Glättungskondensator C_G eingefügt wird?

(Hinweis: Ideale Dioden einsetzen. Im Falle der Simulation geht der Rechner davon aus, dass im Startmoment die Quellen eingeschaltet werden.)

7.6 Ausblick zu weiteren Analysemethoden

Die dargestellten Methoden stellen die Basis für alle Netzwerkberechnungen dar. Sie werden durch weitere [mathematische Verfahren für die Lösung](#) der Gleichungssysteme sowie bei linearen Bauelementen zur [Reduzierung der Differentialbeziehungen](#) auf einfache algebraische Zusammenhänge ergänzt (siehe AEP III).

Modifikationen der Vorgehensweise bei der Lösung mit Hilfe der Kirchhoff'schen Sätze spielen heute keine Rolle mehr. So könnte die Anzahl der entstehenden Gleichungen auf die Anzahl der unabhängigen Knoten mit der Knotenspannungsanalyse (auch Knotenpotentialanalyse) oder auf die Anzahl der unabhängigen Maschen mit der Maschenstromanalyse verringert werden (siehe Abb. 7.25).

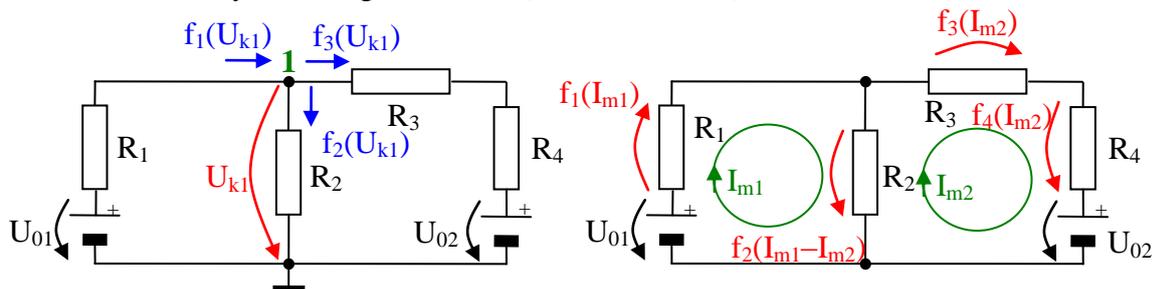


Abb. 7.25: Knotenspannungs- und Maschenstromanalyse

Bei der [Knotenspannungsanalyse](#) wird jedem unabhängigen Knoten eine Spannung gegen den Bezugsknoten (der übrig gebliebene günstig gewählte) zugeordnet. Die Knotensätze werden nur mit den Strom-Spannungs-Beziehungen und diesen Spannungen aufgestellt.

Bei der [Maschenstromanalyse](#) wird jeder unabhängigen Masche ein Strom, der diese Masche umfließt, zugeordnet. Die Maschensätze werden nur mit den Strom-Spannungs-Beziehungen und der jeweiligen Summe der Ströme durch den Zweig aufgestellt.

Die [Knotenspannungsanalyse](#) ist in formalisierter Form mit Matrizen in der Regel die [Grundlage der Simulationsprogramme](#).

Weiterführende Darlegungen sind der Literatur (z.B. [16]) zu entnehmen.

8 Literaturverzeichnis

- [1] Hägele, Thomas; Knutzen, Sönke: Arbeitsprozessorientierte Entwicklung schulischer Lernsituationen, S. 115-118, lernen & lehren Heft 67, 2002
- [2] Dörner, Dietrich: Die Logik des Misslingens, S. 58 und insgesamt, Rowohlt Verlag GmbH 1989
- [3] Täubert, P.: Elektrizitätslehre (Physik für Lehrer Band 4), S. 238-239, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976
- [4] Einstein, Albert: Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, S. 38 ff, Akademie-Verlag Berlin 1970
- [5] Born, Max: Die Relativitätstheorie Einsteins (Fünfte Auflage), S. 192 ff, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1969
- [6] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 169, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [7] Boeck, Erich: Relativitätstheorie und Elektrotechnik, S. 35ff, Shaker Verlag GmbH 2004 (ISBN 3-8322-3813-1)
- [8] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 32,33 u. 51, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [9] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 102-127, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [10] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 154-156, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [11] Born, Max: Die Relativitätstheorie Einsteins (Fünfte Auflage), S. 255 ff, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1969
- [12] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 217, 230ff und insgesamt, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [13] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 218 u. 219, Verlag Technik GmbH Berlin 1991
- [14] Rebhan, Eckhard: Theoretische Physik, insgesamt, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin 1999
- [15] Boeck, Erich: Theoretische Untersuchungen des Impulsverhaltens von Lumineszenzdioden, Heft 9 S. 989-994, Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock 27. Jahrgang (1978) Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe
- [16] Lunze, Klaus: Einführung in die Elektrotechnik (13. Auflage), S. 50-94, Verlag Technik GmbH Berlin 1991